

المُسْنَدُ فِي الرِّيَاضِيَّاتِ

الأسنان

حيدر وليد

07701780364



2021

1

الأعداد المركبة

2

القطوع المخروطية

6

الهندسة الفضائية

الجزء الأول

السادس الإحيائي

07702729223



ملازم دار المغرب



# الأستاذ حيدر وليد

07701780364



2021

## الرياضيات



ثلاث فصول



ملازم  
دار المغرب

عند اقتناء ملزمتك من دار المغرب تأكد من وجود  
( الجلفة المدورة اللاصقة )  
في وجه الغلاف غير ذلك تعتبر مزورة



mlazmna





# المُسْنَدُ فِي الرَّيَاضِيَّاتِ

الجزء الأول

## السادس الاحيائي

1

الأعداد المركبة

2

القطوع المخروطية

6

الهندسة الفضائية



صفحة ملازم  
دار المغرب

نحذر من استنساخها ولا يجوز ذلك لكون فيها اشكال شرعي وقانوني  
وغير مبرئ الذمة والملزمة موثقة من دار الكتب والوثائق  
علما ان ملازمنا حائزة على علامة تجارية من وزارة الصناعة  
دائرة التطوير والتنظيم الصناعي

هام  
للغاية

كل نسخة لا تحمل  
جلدة دائرية على  
وجه الغلاف  
تعتبر مزورة



الحقوق  
محفوظة

أسم الملزمة : المسند في الرياضيات

إعداد : الاستاذ حيدر وليد

الطبعة : الأولى

المطبعة : مطبعة دار المغرب

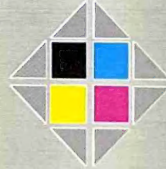
حقوق الطبع محفوظة الى مطبعة دار المغرب ودار العرفان بالإتفاق مع الأستاذ نحذر من نشرها على القنوات وإستنساخها أو الإقتباس منها خلاف ذلك يعرض نفسه للمسائلة القانونية .



ملازم دار المغرب



دار العرفان للنشر والتوزيع



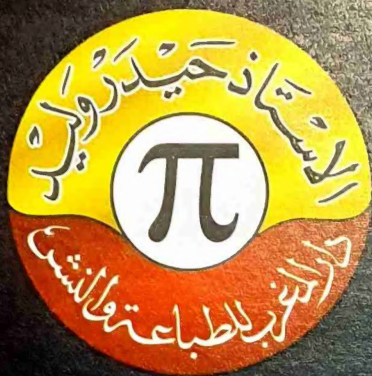
مطبعة المغرب

أن مطبعة المغرب (ملازم دار المغرب) هي دار نشر قانونية مثبتة لدى وزارة الصناعة، وعليه نحذر من عملية التلاعب بطباعة مؤلفاتنا واستنساخها أو نشرها على الانترنت، فهناك عقوبات بحق هذا التجاوز والتعدي على طباعتنا وجهدنا وفق القانون العراقي المرقم ٢١ لسنة ١٩٥٧ والمعدل برقم ٨٠ في سنة ٢٠٠٤ وللمحكمة حق مصادرة المنتجات المخالفة والبضائع وعنوان المكتبة ووسائل التغليف والأوراق، وتذكر أن كل ما بين يديك هو جهد وإجتهد شخصي من الاستاذ والمطبعة وفق الإتفاق المبرم، وعليه لا نخول شرعاً وقانوناً استنساخ أو نشر الملزمة أو أي جزء منها.

لذا اقتضى التنويه والتحذير

دار العرفان





المُسْنَدُ  
حَيْدَرُ وَلَيْدُ

07701780364

المُسْنَدُ فِي  
الرِّيَاضِيَّاتِ  
الإعداد المركبة

1

2021

07702729223



ملازم دار المغرب



مدخل الى موضوع الاعداد المركبة

نعلم ان الجذور التربيعية للاعداد الموجبة هي:

$$\sqrt{1} = 1, \quad \sqrt{9} = 3, \quad \sqrt{25} = 5, \quad \sqrt{100} = 10$$

اي هناك قيمة لعدد موجب تحت الجذر التربيعي .  
ولكن:

$$\sqrt{-9} = ? \quad \begin{cases} 3 \text{ (خطأ)} \\ -3 \text{ (خطأ)} \end{cases}, \quad \sqrt{-16} = ? \quad \begin{cases} 4 \text{ (خطأ)} \\ -4 \text{ (خطأ)} \end{cases}$$

اذن لا توجد قيمة حقيقية لعدد سالب تحت الجذر التربيعي .  
او جذر دليله زوجي مثل:  $\sqrt[8]{\quad}$ ,  $\sqrt[4]{\quad}$ ,  $\sqrt[6]{\quad}$  ... الخ.

**لذلك:**

نفرض ان هناك قيمة لعدد سالب تحت الجذر التربيعي هو (i)

$$\sqrt{-1} = i \quad \Rightarrow \quad i^2 = -1$$

وبتربيع المعادلة الاخيرة

$$i^4 = 1$$

**خلاصة:**

$$i^2 = -1$$

$$i^4 = 1$$

$$i^3 = (i^2)(i)$$

$$i^3 = (-1)(i)$$

$$i^3 = -i$$

حفظ

**استراحة شعرية:**

ما مرّ ذكرك إلا وابتمت له  
كأنك العيد والباقيون أيام  
أو هيام طيفك إلا طرت اتبعه  
أنت الحقيقة والجلّاس أو هيام



كيف نكتب عدد سالب تحت الجذر التربيعي بدلالة (i) :

$\sqrt{-16} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{-1}$ $= 4i$	$\sqrt{-25} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{-1}$ $= 5i$	$\sqrt{-36} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{-1}$ $= 6i$
$\sqrt{-12} = \sqrt{12} \cdot \sqrt{-1}$ $= \sqrt{4 \times 3} (i) = 2\sqrt{3}i$	$\sqrt{-18} = \sqrt{18} \cdot \sqrt{-1}$ $= \sqrt{9 \times 2} (i) = 3\sqrt{2}i$	$\sqrt{-20} = \sqrt{20} \cdot \sqrt{-1}$ $= \sqrt{5 \times 4} (i) = 2\sqrt{5}i$

### تعريف:

العدد المركب: هو العدد الذي يكتب بصيغة (a+bi) حيث يسمى:

a جزؤه الحقيقي

a, b ∈ R

b جزؤه التخيلي

يُرمز لهجموعة الاعداد المركبة بالرمز (C)

\* تسمى الصيغة a+bi الصيغة العادية للعدد المركب.

أو الصيغة الجبرية للعدد المركب.

\* يمكن كتابة العدد المركب بشكل زوج مرتب (a, b) وتسمى الصيغة الديكارتية للعدد المركب.

العدد المركب الصيغة الجبرية	الصيغة الديكارتية	الجزء الحقيقي	الجزء التخيلي
2 + 3i	(2, 3)	2	3
-2 - 3i	(-2, -3)	-2	-3
$\sqrt{3} - i$	( $\sqrt{3}$ , -1)	$\sqrt{3}$	-1
2i	(0, 2)	0	2
3	(3, 0)	3	0

$$\rightarrow 2i = 0 + 2i$$

$$\rightarrow 3 = 3 + 0i$$



## قوى (i)

عند تبسيط  $i^n$  نقسم الأس على 4 وكلما في الصيغة التالية:

$$i^n = \{i, -i, 1, -1\}$$

1 = الباقي ← 2 = الباقي  
3 = الباقي ← 0 = الباقي

مثال

بسط ما يلي:

$$\begin{aligned} 5 \quad i^{999} &= (i^4)^{249} \cdot i^3 \\ &= (1)^{249} (-i) = -i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 \quad i^{25} &= (i^4)^6 \cdot (i)^1 \\ &= (1)^6 \cdot i = i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6 \quad i^{4n+1} &= (i^4)^n \cdot i \\ &= (1)^n \cdot i = i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \quad i^{58} &= (i^4)^{14} \cdot i^2 \\ &= (1)^{14} \cdot i^2 = 1 * -1 = -1 \end{aligned}$$

ناتج  $i^n$  هو:

$$\{i, -i, 1, -1\}$$

$$\begin{aligned} 3 \quad i^5 &= (i^4)^1 \cdot i \\ &= 1 (i) = i \end{aligned}$$

سؤال إضافي: جد ناتج:

$$\begin{aligned} i^{6n+1} &= (i^6)^n \cdot i \\ &= (-1)^n i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 \quad i^6 &= (i^4)^1 \cdot i^2 \\ &= (1) (-1) = -1 \end{aligned}$$

$$(-1)^n = 1 \Rightarrow i^{6n+1} = i$$

عندما  $n$  عدد زوجي

$$(-1)^n = -1 \Rightarrow i^{6n+1} = -i$$

عندما  $n$  عدد فردي



ملاحظة

إذا كان الاس سالب ينزل للمقام ونغيّر الإشارة ثم نبسّط كما سبق وبعدها نضرب الكسر بـ  $(i^4)$  حيث  $i^4 = 1$  أي لا نأثر على الكسر (يُعتبر الضرب في واحد).

7  $i^{-17}$

$$= \frac{1}{i^{17}} = \frac{1}{(i^4)^4 \cdot i} = \frac{1}{i} (i^4)$$

$$= i^3 = -i$$

8  $i^{-13}$

$$= \frac{1}{(i^4)^3 \cdot i} = \frac{1}{i} (i^4)$$

$$= i^3 = -i$$

اتفاق

كل سؤال في أي موضوع في هذا الفصل عندما نرى  $i$  مرفوعة إلى الاس نقوم بتبسيط  $(i)$  قبل التفكير بأي شيء، مهما كان السؤال (ونبسط كما في الطريقة السابقة).

إني أحبك.. قلتها..  
فبنت بقلبي منزلك  
هذا قلبي  
اصطفاك على البرايا..  
واصطفاك..  
وفضلك  
وأقام روحك..  
قبلة لوجيبه..  
واستقبلك !!  
وتلاك ترنيماً سماويّ اللّحون..  
ورتلّك !!  
يا آخر الحبّ الجميل..  
ولست أدرك أولك !!



العمليات على مجموعة الأعداد المركبة

في مجموعة الأعداد المركبة يوجد عمليات رياضية كالتي مرت عليك (الجمع - الطرح - الضرب - القسمة - الجذور التربيعية والتكعيبية - النظير الجمعي والضربي ... الخ) وسنتطرق إليها بالتفصيل.

**أولاً: عملية الجمع:** عند جمع عددين مركبين نجمع الجزء الحقيقي مع الجزء الحقيقي والجزء التخيلي مع الجزء التخيلي وبحسب الاشارة.

جد مجموع العددين المركبين في كل مما يأتي:

مثال

1  $(3 + 4i) + (2 + 5i)$

توضيح قبل الحل: نقوم بجمع الجزء الحقيقي (3) مع (2) ونجمع (4i) مع (5i) حسب الاشارات.

$$\begin{array}{c} \text{جمع} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ (3 + 4i) + (2 + 5i) = (3 + 2) + (4i + 5i) \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \text{جمع} \quad = 5 + 9i \end{array}$$

2  $(5 + 7i) + (-3 - 9i)$

توضيح قبل الحل: نقوم بجمع (5) مع (-3) وتكون طرح لأن الاشارات مختلفة ثم نجمع (7i) مع (-9i) وكذلك طرح لأن الاشارات مختلفة.

$$\begin{array}{c} \text{جمع} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ (5 + 7i) + (-3 - 9i) = (5 - 3) + (7i - 9i) \\ \uparrow \quad \uparrow \\ = 2 - 2i \end{array}$$

3  $(-7 + 2i) + (2 - 5i)$

$$= (-7 + 2) + (2i - 5i) = -5 - 3i$$

4  $(3 + 4\sqrt{2}i) + (-3 - 2\sqrt{2}i) = (3 - 3) + (4\sqrt{2}i - 2\sqrt{2}i) = 0 + 2\sqrt{2}i$

5  $3 + 2 - 5i = 5 - 5i \rightarrow$

هنا نجمع فقط (3) مع (2) حيث لا يوجد تخيلي حتى نجعله مع (-5i)

انتبه!

6  $\left(\frac{3}{2} - i\right) + \left(\frac{1}{5} + 2i\right) = \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{5}\right) + (-i + 2i) = \frac{17}{10} + i$

تم الجمع بعد توحيد المقامات بين  $\frac{3}{2}$  و  $\frac{1}{5}$

انتبه!



**ثانيًا: عملية الطرح:** عند الطرح يتم توزيع اشارة السالب على القوس ثم نجري عملية الجمع أو الطرح بحسب الاشارات .

مثال

جد ناتج ما يأتي :

3  $(3\sqrt{2} + \sqrt{5}i) - (\sqrt{2} + 3\sqrt{5}i)$

$$(3\sqrt{2} + \sqrt{5}i) + (-\sqrt{2} - 3\sqrt{5}i)$$

$$(3\sqrt{2} - \sqrt{2}) + (\sqrt{5}i - 3\sqrt{5}i) = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{5}i$$

1  $(7 - 13i) - (9 + 4i)$

$$(7 - 13i) + (-9 - 4i)$$

$$(7 - 9) + (-13 - 4i) = -2 - 17i$$

4  $3 - (5 - 3i)$

$$(3 + 0i) + (-5 + 3i)$$

$$(3 - 5) + (0i + 3i) = -2 + 3i$$

2  $(5 + 3i) - (2 - 4i)$

$$(5 + 3i) + (-2 + 4i)$$

$$(5 - 2) + (3i + 4i) = 3 + 7i$$

**ثالثًا: عملية الضرب:** عند ضرب عددين مركبين نوزع الاقواس . هنا تذكر أن  $(i^2 = -1)$  .

مثال

جد ناتج ما يأتي :

3  $(10 + 3i)(0 + 6i)$

$$0 + 60i + 0i + 18i^2 = -18 + 60i$$

((نعكس))

4  $(2 + 3i)(-3 + 5i)$

$$-6 + 10i - 9i + 15i^2$$

$$-6 + i - 15 = -21 + i$$

5  $i(1 + i) = i + i^2 = -1 + i$

6  $\frac{-5}{2}(4 + 3i) = \left(\frac{-5}{2} \times 4\right) + \left(\frac{-5}{2} \times 3i\right)$

$$= -10 - \frac{15}{2}i$$

1  $(3 + 2i)(5 + 4i)$

$$15 + 12i + 10i + 8i^2$$

$$15 + 22i - 8 = 7 + 22i$$

(( $i^2$  تعكس اشارة ما قبلها وتحذف))

2  $(2 - 3i)(3 + 5i)$

$$6 + 10i - 9i - 15i^2$$

طرح

$$6 + i + 15 = 21 + i$$

((نعكس الاشارة وتحذف))



رابطه حمله التسمية قبل التطرق الى الفسمة يجب التعرف على مرافق العدد المركب.

مرافق العدد المركب:

$$C = a + bi \Rightarrow \bar{C} = a - bi$$

هو عكس اشارة الجزء التخيلي للعدد المركب فقط. نرمله بالرمز  $\bar{C}$ .

$$C_1 = 2 + 3i \rightarrow \bar{C}_1 = 2 - 3i$$

$$C_2 = 4 + 5i \rightarrow \bar{C}_2 = 4 - 5i$$

$$\overline{1 + i} = 1 - i$$

انتبه!

$$\left[ \begin{array}{l} C_1 = -3 + 4i \\ C_2 = 3 - 4i \end{array} \right. \text{ غير مترافقات لأن اشارة الجزء الحقيقي تغيرت أيضاً.}$$

$$\left[ \begin{array}{l} C_1 = (3i - 5) \\ C_2 = (-3i - 5) \end{array} \right. \text{ العددين مترافقان لأن اشارة الجزء التخيلي هي فقط التي تغيرت والاختلاف فقط في الترتيب.}$$

$$(C \cdot \bar{C} = a^2 + b^2) \text{ عند ضرب عددين مترافقين فيكون الناتج: } (التخيلي)^2 + (الحقيقي)^2$$

$$1 \quad (2 + 3i)(2 - 3i) = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$$

انتبه! الجزء التخيلي بدون i فقط الرقم نأخذه

$$2 \quad (1 - i)(1 + i) = (1)^2 + (1)^2 = 2$$

انتبه! الجزء التخيلي بدون i فقط الرقم

$$3 \quad (-2 + i)(-2 - i) = (-2)^2 + (1)^2 = 4 + 1 = 5$$

انتبه! الجزء التخيلي بدون i فقط الرقم



\* عند وجود البسط والمقام في الاعداد المركبة نضرب البسط والمقام في مرافق العدد المركب الموجود في المقام .

$$\frac{\text{بسط}}{\text{مقام (i)}} \times \frac{\text{مرافق المقام}}{\text{مرافق المقام}}$$

ممنوع (i) بالمقام ... كل i بالمقام تعني مرافق

جد ناتج ما يأتي بصيغة  $a + bi$

مثال

$$\begin{aligned} 4 \quad \frac{1 + 2i}{-2 + i} &= \frac{1 + 2i}{-2 + i} \cdot \frac{-2 - i}{-2 - i} \\ &= \frac{-2 - i - 4i - 2i^2}{(-2)^2 + (1)^2} = +2 \\ &= \frac{-2 - 5i + 2}{5} = \frac{-5i}{5} = 0 - i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 \quad \frac{3 + 4i}{3 - 4i} &= \frac{3 + 4i}{3 - 4i} \cdot \frac{3 + 4i}{3 + 4i} \\ &= \frac{9 + 12i + 12i + 16i^2}{(3)^2 + (4)^2} \\ &= \frac{-7 + 24i}{25} = \frac{-7}{25} + \frac{24}{25}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5 \quad \frac{12 + i}{i} &= \frac{12 + i}{i} \cdot \frac{0 - i}{0 - i} \\ &= \frac{-12i - i^2}{0 + 1} = \frac{1 - 12i}{1} = 1 - 12i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \quad \frac{2 - i}{3 + 4i} &= \frac{2 - i}{3 + 4i} \cdot \frac{3 - 4i}{3 - 4i} \\ &= \frac{6 - 8i - 3i + 4i^2}{(3)^2 + (4)^2} = (-4) \\ &= \frac{2 - 11i}{25} = \frac{2}{25} - \frac{11}{25}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6 \quad \frac{i}{2 + 3i} &= \frac{i}{2 + 3i} \cdot \frac{2 - 3i}{2 - 3i} \\ &= \frac{2i - 3i^2}{(2)^2 + (3)^2} = \frac{3 + 2i}{13} \\ &= \frac{3}{13} + \frac{2}{13}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 \quad \frac{1 + i}{1 - i} &= \frac{1 + i}{1 - i} \cdot \frac{1 + i}{1 + i} \\ &= \frac{1 + i + i + i^2}{(1)^2 + (1)^2} = \frac{2i}{2} = i \\ &= 0 + i \end{aligned}$$



$$Z = \frac{1 - \sqrt{3}i}{1 + \sqrt{3}i}$$

$$Z = \frac{1 - \sqrt{3}i}{1 + \sqrt{3}i} \cdot \frac{1 - \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i}$$

$$Z = \frac{1 - \sqrt{3}i - \sqrt{3}i - 3}{1 + 3} = \frac{-2 - 2\sqrt{3}i}{4}$$

$$Z = \frac{-2}{4} - \frac{2\sqrt{3}}{4}i = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$8 \quad Z = \frac{7 + \sqrt{3}i}{1 + 2\sqrt{3}i}$$

$$Z = \frac{7 + \sqrt{3}i}{1 + 2\sqrt{3}i} \cdot \frac{1 - 2\sqrt{3}i}{1 - 2\sqrt{3}i}$$

$$Z = \frac{7 - 14\sqrt{3}i + \sqrt{3}i + 6}{1 + 12} = \frac{13 - 13\sqrt{3}i}{13}$$

$$Z = \frac{13}{13} - \frac{13\sqrt{3}}{13}i = 1 - \sqrt{3}i$$

$$9 \quad \frac{2+3i}{1-i} \times \frac{1+4i}{4+i} = \frac{2+8i+3i-12}{4+i-4i+1}$$

$$\frac{-10+11i}{5-3i} = \frac{-10+11i}{5-3i} \cdot \frac{5+3i}{5+3i}$$

$$= \frac{-50 - 30i + 55i - 33}{5^2 + 3^2} = \frac{-83 + 25i}{34} = \frac{-83}{34} + \frac{25}{34}i$$

خاصة النظير الضربي هو مقلوب العدد المركب  $\frac{1}{C}$  أو  $C^{-1}$

جد النظير الضربي لعدد  $C = 2 - 2i$  وضعه بالصيغة العادية للعدد المركب.

مثال

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{2 - 2i} \cdot \frac{2 + 2i}{2 + 2i} = \frac{2 + 2i}{2^2 + 2^2} = \frac{2 + 2i}{8} = \frac{2}{8} + \frac{2}{8}i$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$$

خاصة النظير الجمعي هو عكس العدد المركب في الإشارة  $(-C)$  (نعكس إشارة الجزئين الحقيقي والتخيلي).

$$\left. \begin{array}{l} C = 2 + 3i \rightarrow -C = -2 - 3i \\ C = -2 + 2i \rightarrow -C = 2 - 2i \end{array} \right\} \rightarrow \text{مجموع عدد مركب ونظيره الجمعي = صفر}$$



## القوس المرفوع إلى الاس

**أولاً:** إذا كان القوس  $(a + bi)^2$  نفتح القوس مربع حدانية .

**ثانياً:** إذا كان القوس  $(a + bi)^3$  نجزء القوس  $^1$  ( $^2$ ) نفتح التربيع مربع حدانية ثم نضرب الناتج بالقوس الثاني .

**ثالثاً:** إذا كان القوس  $(a + bi)^4$  يصبح  $[(a + bi)^2]^2$  ثم نفتح القوس مربع حدانية والناتج أيضاً مربع حدانية .

**رابعاً:** القوى الأكبر:

$$\begin{array}{l} \left[ (a + bi)^2 \right]^{\frac{n}{2}} \xrightarrow{\text{زوجي } n} (a + bi)^n \\ \left[ (a + bi)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \cdot (a + bi)^1 \xrightarrow{\text{فردى } n} (a + bi)^n \end{array}$$

مربع الحدانية

مربع الحدانية

تنويه: راجع السؤال (9) و (10) في صفحة (20) بها يخص الأس الفردي والسؤال الإضافي في نفس الصفحة يخص الأس الزوجي .

**خامساً:** إذا كان لدينا  $\left( \frac{\text{بسط}}{\text{مقام}} \right)^n$  حيث نتخلص من المشكلة الداخلية بالدرجة الأولى

(المرافق) ثم نتخلص من المشكلة الخارجية وهو الأس

$$\left( \frac{\text{بسط}}{(i)} \right)^n \xrightarrow{\text{مشكلة خارجية}} \left( \frac{\text{بسط}}{(i)} \right)^n \xrightarrow{\text{مشكلة داخلية نبدأ بحلها عن طريق الضرب بالمرافق}}$$

تنويه: راجع المثال (6) في صفحة (16) والسؤال (2) في صفحة (19) بها يخص الملاحظة (خامساً) .



ضخ بالصيغة العادية للعدد المركب:

مثال 5

$$(1+i)^3 + (1-i)^3$$

$$(1+i)^2(1+i) + (1-i)^2(1-i)$$

$$(1+2i-i)(1+i) + (1-2i-i)(1-i)$$

$$2i(1+i) - 2i(1-i)$$

$$2i + 2i^2 - 2i + 2i^2 = 4i^2 = -4 + 0i$$

$$\left(\frac{3+i}{1+i}\right)^3 a+bi \text{ ضخ بصورة}$$

مثال 6

لدينا مشكلتين في السؤال

تحليل السؤال

داخلية وخارجية

$$\left(\frac{3+i}{1+i}\right)^3 \begin{cases} \text{الداخلية (i) بالمقام} \\ \text{الخارجية هي بالتكميب} \end{cases}$$

نفكر بحل المشكلة الداخلية وهي (i) المقام وذلك عن طريق الضرب بالمرافق

$$\left(\frac{3+i}{1+i}\right)^3 = \left(\frac{3+i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i}\right)^3 \begin{matrix} \text{ينزل} \\ \text{كها هو} \end{matrix}$$

$$= \left(\frac{3-3i+i+1}{1+1}\right)^3 = \left(\frac{4-2i}{2}\right)^3$$

$$= \left(\frac{4}{2} - \frac{2i}{2}\right)^3 = (2-i)^3$$

الآن نتخلص من الخارجية وهي التكميب

$$= (2-i)^3 = (2-i)^2(2-i)$$

$$= (4-4i-1)(2-i)$$

$$= (3-4i)(2-i) \text{ توزيع}$$

$$= 6-3i-8i-4$$

$$= 2-11i$$

ضخ بالصيغة العادية  $(3+4i)^2$

مثال 1

\* نفتح التربيع مربع حدانية

$$(3+4i)^2 = 9+24i+16i^2 \begin{matrix} i^2 \text{ تحذف وتعكس} \\ \text{اشارة ما قبلها} \end{matrix}$$

$$= 9+24i-16 = -7+24i$$

ضخ بالصيغة العادية للعدد المركب:

مثال 2

$$(2+3i)^2 + (12+2i)^2$$

$$(4+12i+9i^2) + (144+48i+4i^2)$$

$$4+12i-9 + 144 + 48i-4$$

$$(4-9+144-4) + (12i+48i) = 135+60i$$

حقيقي

تخيلي

ضخ بصورة  $a+bi$

مثال 3

$$(1+i)^2 + (1-i)^2$$

$$(1+2i+i^2) + (1-2i+i^2)$$

$$(1+2i-i) + (1-2i-i) = 0+0i$$

ضخ بصورة  $a+bi$

مثال 4

$$(1+i)^4 - (1-i)^4$$

$$[(1+i)^2]^2 - [(1-i)^2]^2$$

$$(1+2i-i)^2 - (1-2i-i)^2$$

$$(2i)^2 - (-2i)^2$$

$$4i^2 - 4i^2 = 0 + 0i$$



أمثلة من نمط آخر

$$= \frac{1}{3-4i} \cdot \frac{3+4i}{3+4i} - \frac{1}{3+4i} \cdot \frac{3-4i}{3-4i}$$

$$= \frac{3+4i}{9+16} - \frac{3-4i}{9+16}$$

$$= \frac{\cancel{3}+4i-\cancel{3}+4i}{25} = \frac{8}{25}i$$

الطرف الايسر =

مثال 1

اثبت ان:

$$(1-i)(1-i^2)(1-i^3)=4$$

الطرف  
الايسر

$$= (1-i)(1-(-1))(1-(-i))$$

$$= (1-i)(1+1)(1+i)$$

$$= 2(1-i)(1+i)$$

متراافان

$$= 2(1+1)=2(2)$$

2013 / د 1

الطرف الايمن = 4

مثال 3

اثبت ان

$$\frac{(1-i)^2}{1+i} + \frac{(1+i)^2}{1-i} = -2$$

2012 / د 3

تحليل السؤال

مثال 2

اثبت ان:

$$\frac{1}{(2-i)^2} - \frac{1}{(2+i)^2} = \frac{8}{25}i$$

تحليل السؤال

الحل	المشكلة
• نفتح التربيع مربع حدانية	1 وجود قوس تربيع
• نضرب الكسر بالمرافق	2 وجود (i) بالمرافق
• نجعل الكسرين	3 وجود عملية جمع

الحل	المشكلة
• نفتح التربيع مربع حدانية	1 وجود قوس تربيع
• نضرب الكسر بالمرافق	2 وجود (i) بالمرافق
• نطرح الناتجين	3 وجود عملية طرح

$$\frac{\text{الطرف}}{\text{الايسر}} = \frac{1-2i+i^2}{1+i} + \frac{1+2i+i^2}{1-i}$$

$$= \frac{\cancel{1}-2i+\cancel{1}}{1+i} + \frac{\cancel{1}+2i+\cancel{1}}{1-i}$$

$$= \frac{-2i}{1+i} + \frac{2i}{1-i}$$

$$= \frac{-2i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} + \frac{2i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i}$$

$$= \frac{-2i+2i^2}{1+1} + \frac{2i+2i^2}{1+1}$$

$$= \frac{-2i-2}{2} + \frac{2i-2}{2}$$

$$= \frac{-\cancel{2}i-2+\cancel{2}i-2}{2} = \frac{-4}{2}$$

الطرف الايمن = -2 =

نفتح التربيع الذي بالمرافق

$$\frac{\text{الطرف}}{\text{الايسر}} = \frac{1}{4-4i+i^2} - \frac{1}{4+4i+i^2}$$

$$= \frac{1}{4-4i-1} - \frac{1}{4+4i-1}$$

$$= \frac{1}{3-4i} - \frac{1}{3+4i}$$

نضرب كل كسر بالمرافق (مشكلة 2)



إذا كان  $C_1 = 1+i$  ,  $C_2 = 3-2i$  تحقق من أن:

3  $\overline{C_1 \cdot C_2} = \overline{C_1} \cdot \overline{C_2}$

$$(1+i)(3-2i) = (1+i)(3-2i)$$

ناخذ المرافق ثم نضرب ثم نأخذ مرافق للناتج

$$3-2i+3i+2 = (1-i)(3+2i)$$

$$5+i = 3+2i-3i+2$$

$$5-i = 5-i$$

$$R.H.S = L.H.S$$

1  $\overline{C_1 + C_2} = \overline{C_1} + \overline{C_2}$

$$(1+i)+(3-2i) = (1+i) + (3-2i)$$

ناخذ المرافق ثم نجمع نجمع ثم نأخذ مرافق للناتج

$$4-i = (1-i)+(3-2i)$$

$$4+i = 4+i$$

$$R.H.S = L.H.S$$

4  $\overline{\left(\frac{C_1}{C_2}\right)} = \frac{\overline{C_1}}{\overline{C_2}}$

$$\overline{\left(\frac{1+i}{3-2i}\right)} = \frac{1+i}{3-2i}$$

$$\overline{\left(\frac{1+i}{3-2i} \cdot \frac{3+2i}{3+2i}\right)} = \frac{1-i}{3+2i} \cdot \frac{3-2i}{3-2i}$$

$$\overline{\left(\frac{3+2i+3i-2}{9+4}\right)} = \frac{3-2i-3i-2}{9+4}$$

$$\frac{1}{13} - \frac{5}{13}i = \frac{1}{13} - \frac{5}{13}i$$

$$R.H.S = L.H.S$$

2  $\overline{C_1 - C_2} = \overline{C_1} - \overline{C_2}$

$$(1+i)-(3-2i) = (1+i)-(3-2i)$$

$$(1+i)+(-3+2i) = (1-i)-(3+2i)$$

$$-2+3i = (1-i)+(-3-2i)$$

$$-2-3i = -2-3i$$

$$L.H.S = R.H.S$$

إستراحة شهرية

يكفي بأنني مُدّ وجدتك صرت أعرف ما أريد  
ووجدت روعي خلف بسمتك التي صارت بها  
الأيام عيّد  
بالله قلّ لي... كيف احلم بالمزيد؟!



أسئلة وزارية حول الحالات السابقة

سؤال 4: ضح ما يأتي بالصيغة العادية ثم جد نظيره الضربي.

سؤال 4

$$(3+2i)(-2+i)$$

(1) د - 2002

$$-6+3i-4i-2 = -8-i$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{-8-i} \cdot \frac{-8+i}{-8+i}$$

$$= \frac{-8+i}{64+1} = \frac{-8}{65} + \frac{1}{65}i$$

سؤال 5: جد النظير الضربي للعدد المركب  $(3+5i)$  ثم ضعه بالصيغة العادية.

سؤال 5

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{3+5i} \cdot \frac{3-5i}{3-5i}$$

$$= \frac{3-5i}{9+25} = \frac{3}{34} - \frac{5}{34}i$$

(1) د - 2003

سؤال 6: جد الصيغة العادية للعدد المركب:

سؤال 6

$$(1-\sqrt{3}i)^2 - (2-\sqrt{3}i)^2$$

(2) د - 2004

$$(1-2\sqrt{3}i-3)-(4-4\sqrt{3}i-3)$$

$$(-2-2\sqrt{3}i)-(1-4\sqrt{3}i)$$

$$(-2-2\sqrt{3}i)+(-1+4\sqrt{3}i) = -3+2\sqrt{3}i$$

سؤال 7: جد ناتج ما يأتي بالصيغة الديكارتية:

سؤال 7

$$(3+4i)^2 + (5-3i)(1+i)$$

(1) د - 2005

$$(9+24i-16)+(5+5i-3i+3)$$

$$(-7+24i)+(8+2i)$$

$$(-7+8)+(24i+2i) = 1+26i$$

(1, 26)

سؤال 1: ضح بالصورة العادية للعدد المركب:

سؤال 1

(1) د - 1998

$$(1+3i)^2 + (3-2i)^2$$

$$(1+6i-9)+(9-12i-4)$$

$$(-8+6i)+(5-12i)$$

$$(-8+5)+(6i-12i) = -3-6i$$

سؤال 2: ضح بالصورة العادية للعدد المركب:

سؤال 2

(1) د - 1999

$$\left(\frac{3-i}{1+i}\right)^2 = \left(\frac{3-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i}\right)^2$$

$$= \left(\frac{3-3i-i-1}{1+1}\right)^2$$

$$= \left(\frac{2-4i}{2}\right)^2 = (1-2i)^2$$

$$= 1-4i-4 = -3-4i$$

سؤال 3: إذا كان  $y=3-i$  ,  $x=2+3i$  جد قيمة  $x^2 + 2y^2$

سؤال 3

$$x^2 + 2y^2$$

نعوض  $x, y$  بالعلاقة اعلاه

$$(2+3i)^2 + 2(3-i)^2$$

(1) د - 2000

$$(4+12i-9)+2(9-6i-1)$$

$$-5+12i+18-12i-2 = 11+0i$$



سؤال 9 ضح المقدار  $\frac{(1-i)^{13}}{64}$  بالصيغة العادية.

2013  
خارج القطر

$$\begin{aligned}\frac{(1-i)^{13}}{64} &= \frac{[(1-i)^2]^6 \cdot (1-i)}{64} \\ &= \frac{(\cancel{1} - 2i + \cancel{1})^6 (1-i)}{64} = \frac{(-2i)^6 (1-i)}{64} \\ &= \frac{64i^6 (1-i)}{64} = -1(1-i) = -1+i\end{aligned}$$

سؤال 8 إذا كان  $x = 2i - 1$  جد قيمة  $x^2 + 2x + 6$

2000  
خارج القطر

$$\begin{aligned}x &= -1 + 2i \quad (\text{ترتيب}) \\ &\text{تعويض بالعلاقة} \quad \text{توزيع} \quad \text{مربع حدانية} \\ &(-1+2i)^2 + 2(-1+2i) + 6 \\ &1 - \cancel{4i} - 4 - 2 + \cancel{4i} + 6 \\ &= 1 + 0i \quad \text{الناتج}\end{aligned}$$

سؤال 10 ضح بالصورة العادية للعدد المركب  $(1+i)^5 - (1-i)^5$

2012 - د (2)

$$\begin{aligned}&= [(1+i)^2]^2 (1+i) - [(1-i)^2]^2 (1-i) \\ &= [(\cancel{1} + 2i + \cancel{i^2})^2 (1+i)] - [(\cancel{1} - 2i + \cancel{i^2})^2 (1-i)] \\ &= [(2i)^2 (1+i)] - [(-2i)^2 (1-i)] \\ &= [4i^2 (1+i)] - [4i^2 (1-i)] \\ &= [-4(1+i)] - [-4(1-i)] \\ &= -4 - 4i - (-4 + 4i) \\ &= -\cancel{4} - 4i + \cancel{4} - 4i = 0 - 8i\end{aligned}$$

سؤال 11 ضح بصورة  $a + bi$

إضافي

$$\begin{aligned}&\frac{(1+i)^{12}}{32} \\ &\frac{(1+i)^{12}}{32} = \frac{[(1+i)^2]^6}{32} = \frac{(1+2i-1)^6}{32} \\ &= \frac{(2i)^6}{32} = \frac{64i^6}{32} = -2 + 0i\end{aligned}$$



التحليل في مجموعة الاعداد المركبة

**أولاً:** مجموع مربعين: عندما يكون لدينا مجموع مربعين  $(x^2 + y^2)$  نضرب الحد الثاني بـ  $(-i^2)$  ثم يصبح فرق بين مربعين ونحلل.  
أي: نضج  $i^2$  مع الحد الثاني ونعكس اشارته.

1  $x^2 + y^2$

$x^2 - y^2 i^2 = (x - yi)(x + yi)$

2  $x^2 + 4$

$x^2 - 4i^2 = (x - 2i)(x + 2i)$

3  $a^2 + 36b^2$

$a^2 - 36b^2 i^2 = (a + 6bi)(a - 6bi)$

4  $y^2 + 100$

$y^2 - 100i^2 = (y - 10i)(y + 10i)$

إذا طلب في السؤال تحليل عدد الى حاصل ضرب عددين مركبين يكون التحليل كما ورد اعلاه. (مجموع مربعين).

ملاحظة

$1^2=1$

$2^2=4$

$3^2=9$

$4^2=16$

$5^2=25$

$6^2=36$

$7^2=49$

$8^2=64$

$9^2=81$

$10^2=100$

$11^2=121$

$12^2=144$

$13^2=169$

$14^2=196$

$15^2=225$

\* عندما يعطي في السؤال رقم نبحث عن عددين من الارقام اعلاه عند جمعهم يعطي العدد الذي في السؤال ويصبح مجموع مربعين.

مثلاً: العدد 25 ←  $16 + 9$   
العدد 85 ←  $81 + 4$   
وبعدها نغير اشارة الـ + الى - ونضج  $i^2$  ونحلل كما في الامثلة:



مثال

حل كل ما يأتي الى حاصل ضرب عاملين بصورة  $a+bi$

$$\begin{aligned} 1 & \quad 10 = 9 + 1 \\ & \quad = 9 - i^2 \\ & \quad = (3 - i)(3 + i) \end{aligned}$$

أو

$$\begin{aligned} 10 & = 1 + 9 \\ & = 1 - 9i^2 \\ & = (1 - 3i)(1 + 3i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 & \quad 29 = 25 + 4 \\ & \quad = 25 - 4i^2 \\ & \quad = (5 - 2i)(5 + 2i) \end{aligned}$$

أو

$$\begin{aligned} 29 & = 4 + 25 \\ & = 4 - 25i^2 \\ & = (2 - 5i)(2 + 5i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 & \quad 41 = 25 + 16 \\ & \quad = 25 - 16i^2 \\ & \quad = (5 - 4i)(5 + 4i) \end{aligned}$$

أو

$$\begin{aligned} 41 & = 16 + 25 \\ & = 16 - 25i^2 \\ & = (4 - 5i)(4 + 5i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 & \quad 53 = 4 + 49 \\ & \quad = 4 - 49i^2 \\ & \quad = (2 - 7i)(2 + 7i) \end{aligned}$$

أو

$$\begin{aligned} 53 & = 49 + 4 \\ & = 49 - 4i^2 \\ & = (7 - 2i)(7 + 2i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5 & \quad 85 = 81 + 4 \\ & \quad = 81 - 4i^2 \\ & \quad = (9 - 2i)(9 + 2i) \end{aligned}$$

أو

$$\begin{aligned} 85 & = 4 + 81 \\ & = 4 - 81i^2 \\ & = (2 - 9i)(2 + 9i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6 & \quad 125 = 121 + 4 \\ & \quad = 121 - 4i^2 \\ & \quad = (11 - 2i)(11 + 2i) \end{aligned}$$

أو

$$\begin{aligned} 125 & = 4 + 121 \\ & = 4 - 121i^2 \\ & = (2 - 11i)(2 + 11i) \end{aligned}$$



الصفحة للإطلاع فقط

ثانياً: مجموع مكعبين / فرق بين مكعبين : نضرب الحد الثاني بـ  $(-i^2)$  ثم نحلل (فرق / مجموع) مكعبين .

$$x^3 - 27i \xrightarrow{-i^2}$$

تذكر قانون مكعبين

$$x^3 + 27i^3 = (x + 3i)(x^2 - 3xi - 9)$$

مربع الأول (عكس الإشارة) الأول  $\times$  الثاني + مربع الثاني

ثالثاً: التجربة: في حالة وجود  $(i)$  في الحد الوسط نضرب الأخير بـ  $(-i^2)$  ثم نحلل تجربته .

$$x^2 - 3ix + 4 \xleftarrow{\text{أنظر}}$$

$$x^2 - 3ix - 4i^2 = (x + i)(x - 4i)$$

$$x^2 + xi + 6$$

$$x^2 + xi - 6i^2 = (x + 3i)(x - 2i)$$

رابعاً: أهمل المربع: عندما لا يحل السؤال بالتجربة ولا يوجد  $(i)$  في الوسط نضيف  $\left(\frac{1}{2}x\right)^2$  ونطرحه .

$$x^2 + 6x + 25$$

معامل  $x$  هو (3)

$$(x^2 + 6x + 9) - 9 + 25$$

تربيع (3) هو 9

نضيف 9 ونطرح 9

$$(x + 3)^2 + 16 \quad \text{أصبح مجموع مربعين}$$

$$(x + 3)^2 - 16i^2$$

$$(x + 3 + 4i)(x + 3 - 4i)$$



ايجاد قيم  $x, y \in \mathbb{R}$

**أولاً:** أنظر إلى السؤال بتركيز وقم بحل المشاكل وكلما موضح في الجدول ادناه.

المشكلة	طريقة حل المشكلة	نموذج من الأسئلة المحولة
الأقواس ( ) ( )	توزيع الأقواس	مثال (4) و (6)
$\left(\frac{\text{بسط}}{\text{مقام}}\right)$	نضرب بالمرافق	مثال (7)
$(a + bi)^n$	نبسط حسب ملاحظات صفحة (13)	سؤال (3) وزاريات
وجود التحليل	نحلل حسب الملاحظات حسب صفحة (19)	مثال (8)

**تنويه** من الممكن ان يحوي السؤال أكثر من مشكلة.

**ثانياً:** حاول تصفية الطرفين بحيث يصبح

الحقيقي = الحقيقي

التخيلي = التخيلي (نأخذ المعاملات فقط بدون  $i$ )

**ثالثاً:** انتبه لوجود التحليل "فرق مربعين / تجربة / عدد ... الخ"

**رابعاً:** لا تقوم بضرب المرافق في حالة وجود  $X$  أو  $Y$  في البسط أو المقام وحاول أن تجد مخرج آخر لحل السؤال حسب الصيغة.

**خامساً:** إذا أعطى في السؤال مقدارين وذكر عبارة ان المقدارين مترافقان نقوم بوضع علامة  $(=)$  بين المقدارين مع تغيير اشارات كل الأجزاء التخيلية ولأحد الأطراف فقط ثم نكمل الحل كسؤال اعتيادي.

راجع المثال (9) و (10) في الصفحة 28 و 29

**تنويه**



مثال 1

جد قيم  $x, y$  الحقيقيتين:

$$3x + 4i = 2 + 8yi$$

التخيلي = التخيلي  
الحقيقي = الحقيقي

$$(3x = 2) \div 3 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$(8y = 4) \div 8 \Rightarrow y = \frac{4}{8} \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

مثال 3

جد قيم  $x, y \in \mathbb{R}$

$$2x - 1 + 2i = 1 + (y + 1)i$$

تخيلي  
حقيقي

$$2x - 1 = 1 \Rightarrow 2x = 1 + 1 \Rightarrow [2x = 2] \div 2$$

$$\Rightarrow x = 1$$

$$y + 1 = 2 \Rightarrow y = 2 - 1 \Rightarrow y = 1$$

مثال 4

جد قيم  $x, y \in \mathbb{R}$

$$y + 5i = (2x + i)(x + 2i)$$

تحليل السؤال

1 الطرف الايسر  $y + 5i$  لا يحوي اي مشاكل (ينزل نصاً)

2 الطرف الايمن  $(2x + i)(x + 2i)$  فيه اقواس تحتاج توزيع.

$$y + 5i = (2x + i)(x + 2i)$$

$$y + 5i = 2x^2 + 4xi + xi - 2$$

$$y + 5i = (2x^2 - 2) + 5xi$$

$$y = 2x^2 - 2 \dots (1)$$

$$[5 = 5x] \div 5 \Rightarrow x = 1$$

$$y = 2x^2 - 2$$

$$y = 2(1)^2 - 2 \Rightarrow y = 2 - 2$$

$$y = 0$$

مثال 2

جد قيم  $x, y \in \mathbb{R}$

$$2y + 1 - (2x - 1)i = -8 + 3i$$

$$(2y + 1) - (2x - 1)i = -8 + 3i$$

تخيلي  
حقيقي

$$2y + 1 = -8 \Rightarrow 2y = -8 - 1$$

$$[2y = -9] \div 2$$

$$y = \frac{-9}{2}$$

$$-(2x - 1) = 3$$

$$-2x + 1 = 3 \Rightarrow -2x = 3 - 1$$

$$[-2x = 2] \div -2$$

$$x = -1$$



$$0 + 8i = (x + 2i)(y + 2i) + 1$$

$$0 + 8i = xy + 2xi + 2yi - 4 + 1$$

$$0 + 8i = (xy - 3) + 2xi + 2yi$$

$$0 = xy - 3 \rightarrow \text{الحقيقي} = \text{الحقيقي}$$

$$[xy = 3] \div x \Rightarrow y = \frac{3}{x} \dots (1)$$

$$[2x + 2y = 8] \div 2 \rightarrow \text{التخيلي} = \text{التخيلي}$$

$$x + y = 4 \dots (2)$$

بعوض معادلة (1) في (2)

$$[x + \frac{3}{x} = 4] \cdot x$$

$$x(x) + \frac{3}{x}(x) = 4(x)$$

$$x^2 + 3 = 4x \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x - 3)(x - 1) = 0$$

$$\text{أما } x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$\text{أو } x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$\text{عندما } x = 3 \rightarrow y = \frac{3}{x} = \frac{3}{3} \Rightarrow y = 1$$

$$\text{عندما } x = 1 \rightarrow y = \frac{3}{x} = \frac{3}{1} \Rightarrow y = 3$$

جد قيم  $x, y \in \mathbb{R}$

مثال 5

$$\frac{1-i}{1+i} + x + yi = (i + 2i)^2$$

تحليل السؤال

$$1 \quad \frac{1-i}{1+i} \rightarrow \text{نضرب الكسر بالمرافق}$$

$$2 \quad x + yi \rightarrow \text{ينزل (بدون مشاكل)}$$

$$3 \quad (1 + 2i)^2 \rightarrow \text{التربيع مربع حدانية}$$

$$\left(\frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i}\right) + x + yi = 1 + 4i - 4$$

$$\frac{1-i-i-1}{1+1} + x + yi = -3 + 4i$$

$$\frac{-2i}{2} + x + yi = -3 + 4i$$

$$-i + x + yi = -3 + 4i$$

$$x + yi = -3 + 4i + i$$

2012 - د (1) / خارج

2015 - تمهيدي

$$x + yi = -3 + 5i$$

$$x = -3, y = 5$$

جد قيم  $x, y \in \mathbb{R}$

مثال 6

$$8i = (x + 2i)(y + 2i) + 1$$

تحليل السؤال

$$1 \quad 8i \rightarrow \text{لا توجد مشكلة في الطرف الايسر}$$

$$2 \quad (x + 2i)(y + 2i) \rightarrow \text{أقواس تتوزع}$$



مثال 7

جد قيم  $x, y \in \mathbb{R}$

$$\left(\frac{2-i}{1+i}\right)x + \left(\frac{3-i}{2+i}\right)y = \frac{1}{i}$$

تحليل السؤال

1 نضرب الكسر بالمرافق  $\left(\frac{2-i}{1+i}\right) \rightarrow$

2 نضرب الكسر بالمرافق  $\left(\frac{3-i}{2+i}\right) \rightarrow$

3 نضرب بـ  $(i^4)$  أو بالمرافق  $\frac{1}{i} \rightarrow$

مرافق مرافق  $\left(\frac{2-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i}\right)x + \left(\frac{3-i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i}\right)y = \frac{1}{i} \cdot (i^4)$

$$\left(\frac{2-2i-i-1}{1+1}\right)x + \left(\frac{6-3i-2i-1}{4+1}\right)y = i^3$$

$$\left(\frac{1-3i}{2}\right)x + \left(\frac{5-5i}{5}\right)y = -i$$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right)x + (1-i)y = 0-i$$

$$\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}xi + y - yi = 0-i$$

$$\left[\frac{1}{2}x + y = 0\right] \cdot 2 \Rightarrow x + 2y = 0 \quad \dots\dots (1)$$

$$\left[\frac{-3}{2}x - y = -1\right] \cdot 2 \Rightarrow -3x - 2y = -2 \quad \dots\dots (2)$$

$$x + 2y = 0$$

$$-3x - 2y = -2$$

بالجمع

$$-2x = -2 \xrightarrow{+(-2)} x = 1$$

2004 - د (2)

2005 - د (2)

$$1 + 2y = 0 \Rightarrow 2y = -1 \xrightarrow{+2} y = \frac{-1}{2}$$

مثال 8

جد قيم  $x, y \in \mathbb{R}$

$$\frac{y}{1+i} = \frac{x^2+4}{x+2i}$$

2018 - تمهيدي أحيائي

\* راجع تحليل مجموع مربعين  $(x^2+4)$

$$\frac{y}{1+i} = \frac{x^2-4i^2}{x+2i}$$

$$\frac{y}{1+i} = \frac{(x-2i)(x+2i)}{(x+2i)}$$

$$y = (x-2i)(1+i)$$

$$y + 0i = x + xi - 2i + 2$$

$$y + 0i = (x+2) + (x-2)i$$

تخيلي حقيقي

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

$$y = x+2$$

$$y = 2+2 \Rightarrow y=4$$

### تحذير هام جدا

أن مطبعة المغرب (ملازم دار المغرب) هي دار نشر قانونية مثبتة لدى وزارة الصناعة، وعليه نحذر من عملية التلاعب بطباعة مؤلفاتنا واستنساخها أو نشرها على الانترنت، فهناك عقوبات بحق هذا التجاوز والتعدي على طباعتنا وجهدنا وفق القانون العراقي المرقم ٢١ لسنة ١٩٥٧ والمعدل برقم ٨٠ في سنة ٢٠٠٤ وللمحكمة حق مصادرة المنتجات المخالفة والبضائع وعنوان المكتبة ووسائل التغليف والأوراق، وتذكر أن كل ما بين يديك هو جهد وإجتهاد شخصي من الاستاذ والمطبعة وفق الإتفاق المبرم، وعليه لا نخول شرعا وقانونا استنساخ أو نشر الملزمة أو أي جزء منها.



طريقة (2)

طرفين  $\times$  وسطين  $\frac{x-yi}{1+5i} \times \frac{3-2i}{i}$

$i(x-yi) = (3-2i)(1-5i)$   
توزيع توزيع

$xi - y = 3 - 15i - 2i + 10i^2$

$xi - y = 3 - 17i - 10$

متخيلي = تخيلي  
 $xi - y = -7 - 17i$   
حقيقي حقيقي  
 $-y = -7 \Rightarrow y = 7$

$x = -7$

(3) د - 2016

(3) د / احيائي

مثال 9 إذا كان  $\frac{3-2i}{i}$  ،  $\frac{x-yi}{1+5i}$  مترافقان  
فجد قيم  $x$  ،  $y$  الحقيقيتين

تنويه

نتبع الملاحظة خامساً في صفحة (24)  
حيث نضع مساواة (=) بين الكسرين  
بشرط ان نغير اشارة كل الاجزاء التخيلية  
لواحد من الاطراف فقط (انتبه واحد من  
الاطراف وليس الطرفين).

$\frac{x-yi}{1-5i} = \frac{3-2i}{i}$   
الطرف ثابت  
الإشارة

غيرنا اشارة الاجزاء  
التخيلية للطرف  
بكامله.

طريقة (1)

$\frac{x-yi}{1-5i} = \left( \frac{3-2i}{i} \cdot \frac{-i}{-i} \right)$

$\frac{x-yi}{1-5i} = \frac{-3i+2i^2}{0+1}$

$x-yi = (-2-3i)(1-5i)$

$x-yi = -2+10i-3i-15$

$x-yi = -17+7i$

$x = -17$  ،  $y = 7$



مترافقان  $\frac{3+i}{2-i}$  ,  $\frac{6}{x+yi}$

طريقة (2)

طرفين  $\times$  وسطيين  $\frac{6}{x+yi} \times \frac{3+i}{2-i}$

$(x+yi)(3-i) = 6(2+i)$   
معامل مجهول

$x+yi = \frac{6(2+i)}{3-i} \rightarrow$  المظروب في المجهول مقام

$x+yi = \frac{12+6i}{3-i} \cdot \frac{3+i}{3+i}$

$x+yi = \frac{36+12i+18i-6}{9-1}$

$x+yi = \frac{30+30i}{10} = \frac{30}{10} + \frac{30i}{20}$

$x+yi = 3+3i$

$x=3$  ,  $y=3$

2015 - د (3)

2017 - مهدي / احياني

جد قيم  $x, y \in \mathbb{R}$  إذا علمت

مثال 10

ان مترافقان  $\frac{3+i}{2-i}$  ,  $\frac{6}{x+yi}$

$\frac{6}{x+yi} = \frac{3-i}{2+i}$

الطرف ثابت الإشارة

غيرنا الإشارة الاجزاء التخيلية للطرف بكامله.

$\frac{6}{x+yi} = \left( \frac{3-i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} \right)$

$\frac{6}{x+yi} = \frac{6-3i-2i-1}{(2)^2 + (1)^2}$

طريقة (1)

$\frac{6}{x+yi} = \frac{5-5i}{5}$

$\frac{6}{x+yi} = 1-i \Rightarrow (x+yi)(1-i) = 6$

$x+yi = \frac{6}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i}$

$x+yi = \frac{6+6i}{1+1}$

$x+yi = \frac{6+6i}{2}$

$x+yi = 3+3i$

$x=3$  ,  $y=3$



مجموعة من الاسئلة الـ وِزارية حول موضوع ايجاد قيم  $x, y \in \mathbb{R}$

سؤال 2 جد قيم  $x, y \in \mathbb{R}$  التي تحقق

$$x(x+i) + y(y-i) + i = 13$$

(2000 - د 2)

$$x^2 + xi + y^2 - yi = 13 - i$$

$$(x^2 + y^2) + (x - y)i = 13 - i$$

تخيلي حقيقي

$$x^2 + y^2 = 13 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$x - y = -1 \Rightarrow x = -1 + y \quad \dots\dots\dots (2)$$

نعوض (2) في (1) لينتج

$$(-1 + y)^2 + y^2 = 13$$

$$1 - 2y + y^2 + y^2 - 13 = 0$$

$$[2y^2 - 2y - 12 = 0] \div (2)$$

$$y^2 - y - 6 = 0 \quad \text{تجربة}$$

$$(y + 2)(y - 3) = 0$$

$$\text{أما } y + 2 = 0 \Rightarrow y = -2$$

$$\text{أو } y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3$$

نعوض  $y$  في معادلة (1)

$$x = -1 + y$$

$$x = -1 + (-2) \Leftarrow y = -2 \quad \text{عندما}$$

$$x = -3$$

$$x = -1 + 3 \Leftarrow y = 3 \quad \text{عندما}$$

$$x = 2$$

x	y
-3	-2
2	3

سؤال 1 جد قيمتي  $x, y$  التي تحقق

$$(2x + i)(y - 2i) = -2 - 9i \quad (1996 - د 1)$$

$$2xy - 4xi + yi + 2 = -2 - 9i$$

$$(2xy + 2) + (-4x + y)i = -2 - 9i$$

$$2xy + 2 = -2 \quad (\text{الحقيقي} = \text{الحقيقي})$$

$$2xy = -2 - 2 \Rightarrow [2xy = -4] \div 2x$$

$$y = \frac{-2}{x} \quad \dots\dots\dots (1)$$

(التخيلي = التخيلي)

$$-4x + y = -9 \quad \dots\dots\dots (2)$$

بتعويض (1) في (2) ينتج

$$[-4x + \left(\frac{-2}{x}\right) = -9] \cdot x$$

$$-4x^2 - 2 = -9x \Rightarrow 4x^2 - 9x + 2 = 0$$

$$(4x - 1)(x - 2) = 0$$

$$\text{أما } 4x - 1 = 0 \Rightarrow [4x = 1] \div 4 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

$$\text{أو } x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

نعوض  $x$  في (1) لايجاد  $y$

$$y = \frac{-2}{x} = \frac{-2}{\frac{1}{4}} = -8, \quad y = \frac{-2}{2} = -1$$

x	y
$\frac{1}{4}$	-8
2	-1



سؤال 4 جد قيم  $x, y \in \mathbb{R}$  والتي تحقق:

$$(3x + 2yi)^2 = \frac{200}{4 + 3i}$$

(2009 - د 2)

$$9x^2 + 12xyi - 4y^2 = \frac{200}{4 + 3i} \cdot \frac{4 - 3i}{4 - 3i}$$

$$(9x^2 - 4y^2) + 12xyi = \frac{800 - 600i}{(4)^2 + (3)^2}$$

$$(9x^2 - 4y^2) + 12xyi = \frac{800}{25} - \frac{600}{25}i$$

$$(9x^2 - 4y^2) + 12xyi = 32 - 24i$$

$$9x^2 - 4y^2 = 32 \quad (1)$$

$$[12xy = -24] \div 12x \Rightarrow y = \frac{-2}{x} \quad (2)$$

نعوض (2) في (1)

$$9x^2 - 4\left(\frac{-2}{x}\right)^2 = 32 \Rightarrow \left[9x^2 - \frac{16}{x^2} = 32\right] \cdot x^2$$

$$9x^4 - 16 = 32x^2 \Rightarrow 9x^4 - 32x^2 - 16 = 0$$

$$(9x^2 + 4)(x^2 - 4) = 0$$

$$\text{أما } 9x^2 + 4 = 0 \text{ يُهمل } \notin \mathbb{R}$$

$$\text{أما } x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \text{ بالجذر}$$

$$x = \pm 2$$

$$y = \frac{-2}{x} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$y = \frac{-2}{x} = \frac{-2}{-2} = 1$$

x	y
2	-1
-2	1

سؤال 3 جد قيمتي  $x, y \in \mathbb{R}$  التي تحقق

2009

تمهيدي

$$(3 + 2i)^2 y = (x + 3i)^2$$

$$(9 + 12i - 4)y = x^2 + 6xi - 9$$

$$(5 + 12i)y = (x^2 - 9) + 6xi$$

$$5y + 12yi = (x^2 - 9) + 6xi$$

$$5y = x^2 - 9 \quad (1) \text{ (الحقيقي = الحقيقي)}$$

$$12y = 6x \Rightarrow x = 2y \quad (2) \text{ (التخيلي = التخيلي)}$$

نعوض (2) في (1)

$$5y = (2y)^2 - 9$$

$$5y = 4y^2 - 9 \Rightarrow 4y^2 - 5y - 9 = 0$$

$$(4y - 9)(y + 1) = 0$$

$$\text{أما } 4y - 9 = 0 \Rightarrow [4y = 9] \div 4 \Rightarrow y = \frac{9}{4}$$

$$\text{أو } y + 1 = 0 \Rightarrow y = -1$$

نعوض y في معادلة (2)

$$x = 2y = 2\left(\frac{9}{4}\right) \Rightarrow x = \frac{9}{2}$$

$$x = 2y = 2(-1) \Rightarrow x = -2$$

x	y
$\frac{9}{2}$	$\frac{9}{4}$
-2	-1



جد قيمتي  $x, y \in \mathbb{R}$  والتي تحقق:

سؤال 6

2008 - د (2)

$$y + 5i = (2x + i)(x + i)$$

$$y + 5i = 2x^2 + 2xi + xi - 1$$

$$y + 5i = (2x^2 - 1) + 3xi$$

$$y = 2x^2 - 1 \dots\dots\dots (1)$$

$$3x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$$

تعويض

$$y = 2\left(\frac{5}{3}\right)^2 - 1 \Rightarrow y = \frac{50}{9} - 1$$

$$y = \frac{41}{9}$$

ووقفت حين لقائه متسائلاً  
هل يقدر الشعراء وصف كماله  
سبحان من سواي الجمال بوجهه  
وتقاسم الباقيون ثلث جماله

جد قيمتي  $x, y$  الحقيقيتين التي

سؤال 5

تحقق المعادلة:

2016

تمهيدي

$$\left(\frac{125}{11+2i}\right)x + (1-i)^2 y = 11$$

$$\left(\frac{125}{11+2i} \cdot \frac{11-2i}{11-2i}\right)x + (1-2i+2i-1)y = 11$$

$$\left(\frac{125(11-2i)}{(11)^2 + (2)^2}\right)x - 2yi = 11$$

$$\left(\frac{125(11-2i)}{125}\right)x - 2yi = 11$$

$$(11-2i)x - 2yi = 11 + 0i$$

$$11x - 2xi - 2yi = 11 + 0i$$

$$(11x) + (-2x - 2y)i = 11 + 0i$$

$$[11x = 11] \div 11 \Rightarrow x = 1$$

(حقيقي - حقيقي)

$$[-2x - 2y = 0] \div -2$$

(تخيلي - تخيلي)

$$x + y = 0$$

$$1 + y = 0 \Rightarrow y = -1$$

أن مطبعة المغرب (ملازم دار المغرب) هي دار نشر قانونية مثبتة لدى وزارة الصناعة، وعليه نحذر من عملية التلاعب بطباعة مؤلفاتنا واستنساخها أو نشرها على الأنترنت، فهناك عقوبات بحق هذا التجاوز والتعدي على طباعتنا وجهدنا وفق القانون العراقي المرقم ٢١ لسنة ١٩٥٧ والمعدل برقم ٨٠ في سنة ٢٠٠٤ وللمحكمة حق مصادرة المنتجات المخالفة والبضائع وعنوان المكتبة ووسائل التغليف والأوراق، وتذكر أن كل ما بين يديك هو جهد واجتهاد شخصي من الاستاذ والمطبعة وفق الإتفاق المبرم، وعليه لا نخول شرعاً وقانوناً استنساخ أو نشر الملزمة أو أي جزء منها. لذا افتضى التنويه والتحذير

تحذير هام جداً



جد قيمتي  $x, y$  الحقيقيتين التي

سؤال 8

تحقق:

(1998 - د 2)

$$(2 + xi)(-x + i) = \frac{9y^2 + 49}{3y + 7i}$$

$$-2x + 2i - x^2i - x = \frac{9y^2 - 49i^2}{3y + 7i}$$

$$-3x + (2 - x^2)i = \frac{(3y + 7i)(3y - 7i)}{(3y + 7i)}$$

$$-3x + (2 - x^2)i = 3y - 7i$$

$$[-3x = 3y] \div 3 \Rightarrow y = -x \quad \dots \quad (1)$$

$$2 - x^2 = -7 \Rightarrow 2 + 7 = x^2$$

$$x^2 = 9 \quad \text{بالجذر}$$

$$x = \pm 3$$

$$y = -x$$

$$y = -3 \quad \leftarrow \quad x = 3 \quad \text{عندما}$$

$$y = -(-3) \quad \leftarrow \quad x = -3 \quad \text{عندما}$$

$$y = 3$$

جد قيمتي  $x, y \in \mathbb{R}$  إذا علمت:

سؤال 7

(2016 - د 2)

$$(x + 2i)(x - i) = \frac{121 + 9y^2}{11 + 3yi}$$

$$x^2 - xi + 2xi + 2 = \frac{121 - 9y^2i^2}{11 + 3yi}$$

$$(x^2 + 2) + xi = \frac{(11 + 3yi)(11 - 3yi)}{(11 + 3yi)}$$

تخيلي = تخيلي

$$(x^2 + 2) + xi = 11 - 3yi$$

حقيقي = حقيقي

$$x^2 + 2 = 11 \Rightarrow x^2 = 11 - 2 \Rightarrow x^2 = 9 \quad \text{بالجذر}$$

$$x = \pm 3$$

$$x = -3y \div -3 \Rightarrow y = \frac{x}{-3} = \frac{\pm 3}{-3}$$

$$y = \pm 1$$

## الرياضيات



## الجذور التربيعية للعدد المركب

\* كل  $a$  موجودة تحت الجذر التربيعي يتم حل السؤال عن طريق الفرضية وقبل بحل السؤال يجب وضع العجج المركب بأبسط صورة (الصيغة العادية).

$$\sqrt{a+bi} = x+yi \quad \text{الفرضية}$$

$$a+bi = (x+yi)^2 \quad \text{تربيع الطرفين}$$

$$a+bi = x^2 + 2xyi - y^2 \Rightarrow a+bi = (x^2 - y^2) + 2xyi \quad ((\text{ثابتة في الحل}))$$

$$x^2 - y^2 = a \quad \text{حقيقي = حقيقي (1) .....}$$

$$2xy = b \quad \text{تخيلي = تخيلي (2) .....}$$

بحل المعادلتين بالتعويض وإيجاد  $x, y$

الناتج:

$$C = \bar{C} (x \circ y i)$$

اشارة الجزء التخيلي من السؤال

### ملاحظة

تم حل المثال الاول بخطوات تفصيلية مع الشرح وباقي الامثلة بخطوات نموذجية يمكن للطلاب ضبط الخطوات من المثال الاول وحل باقي الامثلة على ضوء المثال الأول.

## الرياضيات



مثال

جد الجذور التربعية للعدد المركبي :

1

$$8 + 6i$$

\* نبدأ الحل مباشرة لأن العدد  $8+6i$  بالصيغة العادية وهو يريد الجذر التربيعي أي  $\sqrt{8+6i}$

$$\sqrt{8+6i} = x + yi$$

فرضية من عندنا  $\rightarrow$  العدد من السؤال  $\leftarrow$

الآن نقوم بتربيع الطرفين

$$8 + 6i = (x + yi)^2$$

الطرف يصبح اس (2)  $\rightarrow$  يلغي الجذر  $\leftarrow$

$$8 + 6i = x^2 + 2xyi - y^2$$

ثم نفتح التربيع (الايمن)

$$8 + 6i = (x^2 - y^2) + 2xyi$$

تخيلي تخيلي تخيلي حقيقي حقيقي حقيقي

وبعدها الحقيقي = الحقيقي

$$x^2 - y^2 = 8 \quad \dots (1)$$

$$[2xy = 6] \div 2x$$

دائماً هنا في الموضوع  
نقسم على  $2x$

ثم التخيلي = التخيلي

$$y = \frac{6}{2x} \Rightarrow y = \frac{3}{x} \quad \dots (2)$$

نعوض معادلة (2) في (1)

$$x^2 - y^2 = 8 \Rightarrow x^2 - \left(\frac{3}{x}\right)^2 = 8 \Rightarrow \left[x^2 - \frac{9}{x^2} = 8\right] \cdot x^2$$

$$x^4 - 9 = 8x^2 \Rightarrow x^4 - 8x^2 - 9 = 0$$

$$(x^2 - 9)(x^2 + 1) = 0 \quad (\text{تجربة})$$

$$\textcircled{\text{أما}} \quad x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \rightarrow y = \frac{3}{\pm 3} = \pm 1$$

$$C = \pm (3 + i)$$

$$C_1 = 3 + i, \quad C_2 = -3 - i$$

$$\textcircled{\text{أو}} \quad x^2 + 1 = 0 \quad \notin \mathbb{R}$$



3 -i

$$\sqrt{0-i} = x + yi \quad \text{بالتربيع}$$

$$0-i = (x^2 - y^2) + 2xyi$$

$$x^2 - y^2 = 0 \quad \dots\dots(1)$$

$$[2xy = -1] \div 2x \Rightarrow y = \frac{-1}{2x} \quad \dots\dots(2)$$

$$x^2 - y^2 = 0$$

$$x^2 - \left(\frac{-1}{2x}\right)^2 = 0 \Rightarrow \left[x^2 - \frac{1}{4x^2} = 0\right] \cdot 4x^2$$

$$4x^4 - 1 = 0 \quad ((\text{فرق بين مربعين}))$$

$$(2x^2 + 1)(2x^2 - 1) = 0$$

$$\underline{\text{أما}} \quad 2x^2 + 1 = 0 \quad \text{يُهمَل} \quad \notin \mathbb{R}$$

$$\underline{\text{أو}} \quad 2x^2 - 1 = 0 \Rightarrow [2x^2 = 1] \div 2$$

$$x^2 = \frac{1}{2} \quad \text{بالجذر} \quad x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$y = \frac{-1}{2x} = \frac{-1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$C = \pm \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) \quad \text{إشارة الجزء التخيلي لعدد السؤال}$$

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

$$C_2 = \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

2 7+24i

$$\sqrt{7+24i} = x + yi \quad \text{بالتربيع}$$

$$7+24i = (x^2 - y^2) + 2xyi$$

$$x^2 - y^2 = 7 \quad \dots\dots(1)$$

$$[2xy = 24] \div 2x \Rightarrow y = \frac{12}{x} \quad \dots\dots(2)$$

$$x^2 - y^2 = 7$$

تعويض في معادلة (1)

$$x^2 - \left(\frac{12}{x}\right)^2 = 7 \Rightarrow \left[x^2 - \frac{144}{x^2} = 7\right] \cdot x^2$$

$$x^4 - 144 = 7x^2 \Rightarrow x^4 - 7x^2 - 144 = 0$$

$$(x^2 + 9)(x^2 - 16) = 0$$

$$\underline{\text{أما}} \quad x^2 + 9 = 0 \quad \text{يُهمَل} \quad \notin \mathbb{R}$$

$$\underline{\text{أو}} \quad x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x^2 = 16 \quad \text{بالجذر}$$

$$x = \pm 4$$

$$y = \frac{12}{x} = \frac{12}{\pm 4} = \pm 3$$

$$C_1 = \pm(4 + 3i)$$

$$C_1 = 4 + 3i, \quad C_2 = -4 - 3i$$

توضيح

$$C_1 = + (4 + 3i) = 4 + 3i \quad (+ \text{ حالة})$$

$$C_2 = - (4 + 3i) = -4 - 3i \quad (- \text{ حالة})$$



5  $8i$

بالتربيع  $\sqrt{0+8i} = x + yi$

$$0+8i = (x^2 - y^2) + 2xyi$$

$$x^2 - y^2 = 0 \dots\dots(1)$$

$$\left[ \frac{2xy}{2x} = \frac{8}{2x} \right] \div 2x \Rightarrow y = \frac{4}{x} \dots\dots(2)$$

$$x^2 - y^2 = 0$$

$$x^2 - \left(\frac{4}{x}\right)^2 = 0 \Rightarrow \left[x^2 - \frac{16}{x^2} = 0\right] \cdot x^2$$

$$x^4 - 16 = 0 \quad ((\text{فرق بين مربعين}))$$

$$(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$$

بالجذر  $\underline{\text{أما}} \quad x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4$

$$x = \pm 2$$

أو  $\underline{\text{أما}} \quad x^2 + 4 = 0$  يُهمل  $\notin \mathbb{R}$

$$y = \frac{4}{x} = \frac{4}{\pm 2} = \pm 2$$

$$C = \pm(2 + 2i)$$

$$C_1 = 2 + 2i$$

$$C_2 = -2 - 2i$$

4  $-6i$

بالتربيع  $\sqrt{0-6i} = x + yi$

$$0-6i = (x^2 - y^2) + 2xyi$$

$$x^2 - y^2 = 0 \dots\dots(1)$$

$$[2xy = -6] \div 2x \Rightarrow y = \frac{-3}{x} \dots\dots(2)$$

$$x^2 - y^2 = 0$$

$$x^2 - \left(\frac{-3}{x}\right)^2 = 0 \Rightarrow \left[x^2 - \frac{9}{x^2} = 0\right] \cdot x^2$$

$$x^4 - 9 = 0 \quad ((\text{فرق بين مربعين}))$$

$$(x^2 - 3)(x^2 + 3) = 0$$

بالجذر  $\underline{\text{أما}} \quad x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3$

$$x = \pm \sqrt{3}$$

أو  $\underline{\text{أما}} \quad x^2 + 3 = 0$  يُهمل  $\notin \mathbb{R}$

$$y = \frac{-3}{x} = \frac{-3}{\pm \sqrt{3}} = \frac{-\left(\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}\right)}{\pm \sqrt{3}}$$

$$y = \pm \sqrt{3}$$

$$\pm(\sqrt{3} - \sqrt{3}i)$$

$$C_1 = \sqrt{3} - \sqrt{3}i$$

$$C_2 = -\sqrt{3} + \sqrt{3}i$$



أو  $2x^2 - 3 = 0 \Rightarrow [2x^2 = 3] \div 2$

$x^2 = \frac{3}{2}$  بالجزر  $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$y = \frac{\sqrt{3}}{2x} = \frac{\sqrt{3}}{2\left(\pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

توضيح  $C = \pm \left( \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right)$

$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right)} C_1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$

$C_2 = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$

7 -25

$x = \sqrt{-25}$

$x = \pm 5i$

8 -17

$x = \sqrt{17} \cdot \sqrt{-1}$

$x = \pm \sqrt{17}i$

6  $\frac{4}{1-\sqrt{3}i}$

$\frac{4}{1-\sqrt{3}i} \cdot \frac{1+\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i} = \frac{4(1+\sqrt{3}i)}{(1)^2 + (\sqrt{3})^2}$

$\frac{4(1+\sqrt{3}i)}{4} = 1 + \sqrt{3}i$

بالتربيع  $\sqrt{1+\sqrt{3}i} = x + yi$

$1 + \sqrt{3}i = (x^2 - y^2) + 2xyi$

$x^2 - y^2 = 1 \dots\dots(1)$

$[2xy = \sqrt{3}] \div 2x \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{2x}$

$x^2 - y^2 = 1$

$x^2 - \left( \frac{\sqrt{3}}{2x} \right)^2 = 1$

$\left[ x^2 - \frac{3}{4x^2} = 1 \right] \cdot 4x^2$

$4x^4 - 3 = 4x^2$

$4x^4 - 4x^2 - 3 = 0$  (تجربة)

$(2x^2 + 1)(2x^2 - 3) = 0$

$2x^2 + 1 = 0$  يُهمل  $\in \mathbb{R}$



أسئلة الوزارية حول موضوع الجذور التربيعية

$$x^2 - \left(\frac{3}{2x}\right)^2 = 4$$

$$\left[x^2 - \frac{9}{4x^2} = 4\right] \cdot 4x^2 \Rightarrow 4x^4 - 9 = 16x^2$$

$$4x^4 - 16x^2 - 9 = 0$$

$$(2x^2 - 9)(2x^2 + 1) = 0$$

$$\underline{\text{أما}} \quad 2x^2 - 9 = 0 \Rightarrow [2x^2 = 9] \div 2$$

$$x^2 = \frac{9}{2} \xrightarrow{\text{بالجذر}} x = \pm \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\underline{\text{أو}} \quad 2x^2 + 1 = 0 \quad \text{يُهل} \notin \mathbb{R}$$

$$y = \frac{3}{2x} = \frac{3}{2 \cdot \left(\pm \frac{3}{\sqrt{2}}\right)} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$C = \pm \left(\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

$$C_1 = \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i, \quad C_2 = -\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

توضيح لخطوة (y)

$$y = \frac{3}{2x} = \frac{3}{2 \cdot \left(\pm \frac{3}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{3}{\cancel{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} \left(\pm \frac{3}{\cancel{\sqrt{2}}}\right)} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

سؤال 1 إذا كان  $c, d \in \mathbb{R} \quad C + di = \frac{7-4i}{2+i}$

1997 - د (1)

$$\sqrt{2c - di}$$

ملاحظة

عندما يعطي سؤال فيه علاقة تحتوي مجهول نقوم بتبسيط العلاقة ونجد منها المجهول.

∴ نجد قيم  $c, d \in \mathbb{R}$  من العلاقة أولاً.

$$C + di = \frac{7-4i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i}$$

$$C + di = \frac{14-7i-8i-4}{(2)^2 + (1)^2} = \frac{10-15i}{5}$$

$$\begin{array}{l} \downarrow \quad \downarrow \\ C + di = 2 - 3i \quad C = 2 \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \quad \quad \quad \quad \quad d = -3 \end{array}$$

$$\sqrt{2c - di} = \sqrt{2(2) - (-3)i}$$

$$\sqrt{4+3i} = x + yi \quad \text{بالتربيع}$$

$$4+3i = (x^2 - y^2) + 2xyi$$

$$x^2 - y^2 = 4 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\left[\frac{2xy}{2x} = \frac{3}{2x}\right] \div 2x \Rightarrow y = \frac{3}{2x} \quad \dots\dots\dots (2)$$

تعويض

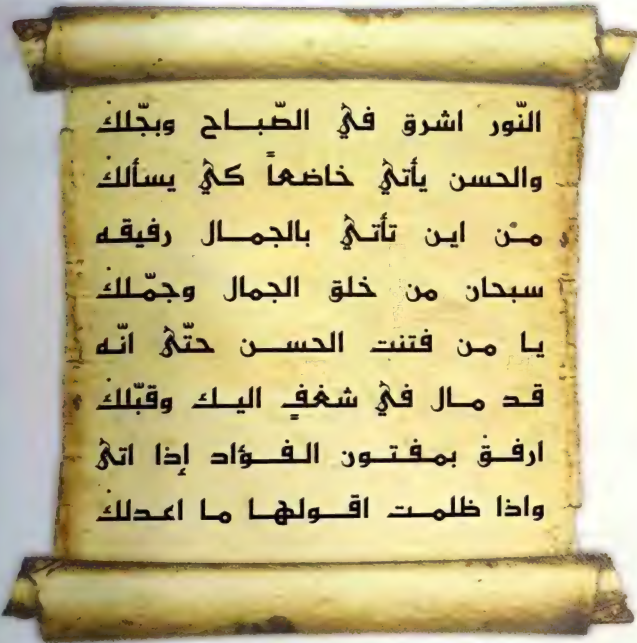
$$x^2 - y^2 = 4$$



سؤال 3 جد الجذور التربيعيات للعدد

(2010 - د 2) المركب  $(-1+7i)(1+i)$

$C_1 = 1+3i$  ,  $C_2 = -1-3i$



النور اشرق في الصباح وبجلا  
والحسن يأتي خاضعا كئ يسألك  
من اين تأتي بالجمال رفيقه  
سبحان من خلق الجمال وجملك  
يا من فتنت الحسن حتى انه  
قد مال في شغف اليك وقبلك  
ارفق بمفتون الفؤاد اذا اتى  
واذا ظلمت اقولها ما اعدلك

### تحذير هام جدا

أن مطبعة المغرب (ملازم دار المغرب) هي دار نشر قانونية مثبتة لدى وزارة الصناعة، وعليه نحذر من عملية التلاعب بطباعة مؤلفاتنا واستنساخها أو نشرها على الانترنت، فهناك عقوبات بحق هذا التجاوز والتعدي على طباعتنا وجهدنا وفق القانون العراقي المرقم ٢١ لسنة ١٩٥٧ والمعدل برقم ٨٠ في سنة ٢٠٠٤ وللمحكمة حق مصادرة المنتجات المخالفة والبضائع وعنوان المكتبة ووسائل التغليف والأوراق، وتذكر أن كل ما بين يديك هو جهد وإجتهد شخصي من الاستاذ والمطبعة وفق الإتفاق المبرم، وعليه لا نخول شرعا وقانونا استنساخ أو نشر الملزمة أو أي جزء منها.

سؤال 2 جد الجذور التربيعيات للعدد

(2004 - د 2) المركب  $\frac{14+2i}{1+i}$

ملاحظة يجب وضع العدد بصيغة  $(a+bi)$

$$\frac{14+2i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{14-14i+2i+2}{(1)^2+(1)^2}$$

$$\frac{16-12i}{2} = 8-6i$$

بالتربيع  $\sqrt{8-6i} = x+yi$

$$8-6i = (x^2 - y^2) + 2xyi$$

$$x^2 - y^2 = 8 \quad \dots\dots(1) \quad , \quad 2xy = -6 \div 2x$$

$$y = \frac{-3}{x} \quad \dots\dots(2)$$

$$x^2 - \left(\frac{-3}{x}\right)^2 = 8$$

$$\left[x^2 - \frac{9}{x^2} = 8\right] \cdot x^2 \Rightarrow x^4 - 9 = 8x^2$$

$$x^4 - 8x^2 - 9 = 0$$

$$(x^2 - 9)(x^2 + 1) = 0$$

أما  $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9$  بالجزر  $x = \pm 3$

أو  $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow$  يُهمل  $\notin \mathbb{R}$

$$y = \frac{-3}{x} = \frac{-3}{\pm 3} = \pm 1$$

$$C = \mp(3-i)$$

$$C_1 = 3-i$$

$$C_2 = -3+i$$



## تكوين المعادلة التربيعية إذا علم جذرها

عندما يطلب معادلة تربيعية ويعطي جذري المعادلة:

1 يجب وضع الجذرين بصورة  $a+bi$

2 نجد مجموع الجذرين وحاصل ضرب الجذرين.

3 نطبق العلاقة التالية:

$$x^2 - (\text{مجموع الجذرين})x + (\text{حاصل ضرب الجذرين}) = 0 \quad ((\text{صيغة قياسية}))$$

\* عندما يقول في السؤال ان المعادلة ذات معاملات حقيقية هذا يعني ان الجذرات مترافقات.

مثال 3 كَوْن المعادلة التربيعية التي

$$m = \frac{3-i}{1+i}, L = (3-2i)^2 \text{ جذرها}$$

\* يجب تبسيط الجذور أولاً

$$m = \frac{3-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{3-3i-i-1}{(1)^2 + (1)^2}$$

$$m = \frac{2-4i}{2} \Rightarrow m = 1-2i$$

$$L = (3-2i)^2 = 9-12i-4$$

$$L = 5-12i$$

$$m+L = (1-2i) + (5-12i) \text{ مجموع الجذرين} \\ = 6-14i$$

$$m \cdot L = (1-2i)(5-12i) \\ = 5-12i-10i-24 = -19-22i$$

$$x^2 - (6-14i)x + (-19-22i) = 0$$

مثال 1 كَوْن المعادلة التربيعية التي

$$m=1-i, L=1+2i \text{ حيث}$$

$$m+L = (1-i) + (1+2i)$$

$$\text{مجموع الجذرين} = 2+i$$

$$m \cdot L = (1-i)(1+2i)$$

$$\text{ضرب الجذرين} = 1+2i-i+2 \\ = 3+i$$

$$x^2 - (2+i)x + (3+i) = 0$$

مثال 2 كَوْن المعادلة التربيعية التي

$$\bar{m} = 2+2i \text{ جذرها}$$

$$m = 2+2i, L = -2-2i$$

$$m+L = (2+2i) + (-2-2i) = 0$$

$$m \cdot L = (2+2i)(-2-2i) \\ = -4-4i-4i-4 = -8i$$

$$x^2 - (0)x + (-8i) = 0$$

$$x^2 - 8i = 0$$



مثال 1

كُونِ المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية والتي احد جذورها (i).

((المعاملات حقيقية أي ان  $m = i$   
 $L = -i$  الجذران مترافقان)).

$$m + L = (i) + (-i) = 0$$

$$m \cdot L = (i)(-i) = -i^2 = 1$$

$$x^2 - (0)x + 1 = 0$$

$$x^2 + 1 = 0$$

مثال 2

كُونِ المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية والتي احد جذورها (3-4i).

((مترافقان))  $m = 3 - 4i$  ,  $L = 3 + 4i$

$$m + L = (3 - 4i) + (3 + 4i) = 6$$

$$m \cdot L = (3 - 4i)(3 + 4i) = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

$$x^2 - 6x + 25 = 0$$

مثال 3

كُونِ المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية والتي احد جذورها (5-i).

$$m + L = (5 - i) + (5 + i) = 10$$

$$m \cdot L = (5 - i)(5 + i) = (5)^2 + (1)^2 = 25 + 1 = 26$$

$$x^2 - 10x + 26 = 0$$

مثال 4

كُونِ المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية والتي احد جذورها  $\frac{\sqrt{3} + 3i}{4}$ .

$$\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i , \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4}i$$

$$m + L = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4}i\right)$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$m \cdot L = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4}i\right)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$= \frac{3}{16} + \frac{9}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

$$x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{3}{4} = 0$$

### تحذير هام جدا

أن مطبعة المغرب (ملازم دار المغرب) هي دار نشر قانونية مثبتة لدى وزارة الصناعة، وعليه نحذر من عملية التلاعب بطباعة مؤلفاتنا واستنساخها أو نشرها على الانترنت، فهناك عقوبات بحق هذا التجاوز والتعدي على طباعتنا وجهدنا وفق القانون العراقي المرقم ٢١ لسنة ١٩٥٧ والمعدل برقم ٨٠ في سنة ٢٠٠٤ وللمحكمة حق مصادرة المنتجات المخالفة والبضائع وعنوان المكتبة ووسائل التغليف والأوراق، وتذكر أن كل ما بين يديك هو جهد واجتهاد شخصي من الاساتاذ والمطبعة وفق الإتفاق المبرم، وعليه لا نخول شرعاً وقانوناً استنساخ أو نشر الملزمة أو أي جزء منها.



أسئلة مختلفة ذات صلة

سؤال 1 إذا كان  $(2+4i)$  هو أحد جذري

$$2x^2 - x - bx + c - 6 = 0$$

معاملاتها حقيقية، جد  $b, c \in \mathbb{R}$

(2015 - د 2)

الجذور مترافقان لأن المعادلة ذات معاملات حقيقية

$$m = 2 + 4i, L = 2 - 4i$$

$$2x^2 - x - bx + c - 6 = 0$$

$$[2x^2 - x(1+b) + (c-6) = 0] \div 2$$

$$x^2 - x\left(\frac{1+b}{2}\right) + \left(\frac{c-6}{2}\right) = 0$$

حاصل ضرب الجذور

$$m + L = \frac{1+b}{2}$$

نعوض الجذور  $m, L$

$$(2 + 4i) + (2 - 4i) = \frac{1+b}{2}$$

$$4 = \frac{1+b}{2} \Rightarrow 1+b = 8 \Rightarrow b = 7$$

$$m \cdot L = \frac{c-6}{2}$$

نعوض الجذور  $m, L$

$$(2 + 4i)(2 - 4i) = \frac{c-6}{2}$$

$$4 + 16 = \frac{c-6}{2} \Rightarrow \left[20 = \frac{c-6}{2}\right] \cdot 2$$

$$40 = c - 6 \Rightarrow c = 46$$

\* إذا أعطى في السؤال معادلة تربيعية تحويل مجاهيل نتبع الخطوات التالية:

أولاً: نضع المعادلة بالشكل القياسي حيث الطرف الأيمن  $= 0$  ثم نجعلها بالصيغة التالية:

$$x^2 + (\text{مجموع الجذور})x + (\text{حاصل ضرب الجذور}) = 0$$

ثانياً: إذا وجد أكثر من حد فيه  $x$  نلغسبه  $x$  عامل مشترك ويسحب بإشارة سالبة لأن الشكل القياسي فيه معامل  $x$  سالب

ثالثاً: نقسم على معامل  $x^2$  دائماً لجعله  $= 1$

رابعاً: نحدد مجموع الجذور وحاصل ضرب الجذور.

خامساً: إذا كان في المعادلة مجهول واحد فقط نحاول البدء بالجزء المعلوم كلياً. (حاصل الضرب أو حاصل الجمع) كما في السؤال (2)

أنظر هنا



أحد الجذرين ثلاثة أمثال الآخر  $m = 3L$

$$m + L = (4 - 12i)$$

$$3L + L = 4 - 12i$$

$$[4L = 4 - 12i] + 4 \Rightarrow L = 1 - 3i$$

$$m = 3(1 - 3i)$$

$$m = 3 - 9i$$

لأن  $k$  يمثل حاصل ضرب الجذرين  $K = m \cdot L$

$$K = (3 - 9i)(1 - 3i)$$

$$K = 3 - 9i - 9i - 27$$

$$K = -24 - 18i$$

سؤال 4 إذا كان  $(2 + i)$  يمثل أحد جذري

المعادلة  $x^2 - 4ix + a = 0$  جد الجذر الآخر. ثم جد قيمة  $a$ .

$$x^2 - 4ix + a = 0 \Rightarrow x^2 - (4i)x + a = 0$$

$$m + L = +4i$$

$$2 + i + L = 4i \Rightarrow L = -2 + 4i - i$$

$$L = -2 + 3i \text{ الجذر الآخر}$$

$a =$  حاصل ضرب الجذرين

$$a = m \cdot L$$

$$a = (2 + i)(-2 + 3i)$$

$$a = -4 + 6i - 2i - 3$$

$$a = -7 + 4i$$

سؤال 2 إذا كان  $(3 + i)$  هو أحد جذري

المعادلة  $x^2 - ax + (5 + 5i) = 0$  فما قيمة  $a \in \mathbb{C}$  وما قيمة الجذر الآخر؟

(1) 2011 د

نبدأ بالجزء الكامل وهو حاصل ضرب الجذرين

$$m \cdot L = 5 + 5i \Rightarrow (3 + i)(L) = 5 + 5i$$

$$L = \frac{5 + 5i}{3 + i} \cdot \frac{3 - i}{3 - i} = \frac{15 - 5i + 15i + 5}{9 + 1}$$

$$L = \frac{20 + 10i}{10} = \frac{20}{10} + \frac{10}{10}i$$

$$L = 2 + i$$

الآن نجد قيمة  $a$  وهي تمثل مجموع الجذرين

$$a = m + L$$

$$a = (3 + i) + (2 + i)$$

$$a = 5 + 2i$$

سؤال 3 إذا كان أحد جذري المعادلة

$x^2 + K = 4x - 12ix$  هو ثلاث أمثال الآخر جد الجذرات وما قيمة  $K$ ؟ إثنائي

$$x^2 + K = 4x - 12ix$$

$$x^2 - 4x + 12ix + K = 0$$

$$x^2 - x(4 - 12i) + K = 0$$

مجموع الجذرين



## حل المعادلة التربيعية في ج

\* يتم حل المعادلة من الشكل  $ax^2 + bx + c = 0$  باستخدام قانون الدستور .

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

حيث:  $x^2$  معامل = a

$x$  معامل = b

c = الحد البتلق ((بدون x))

جد مجموعة حل المعادلة:

$$2Z^2 - 5Z + 13 = 0$$

$$Z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$a = 2$$

$$b = -5$$

$$c = 13$$

$$Z = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(2)(13)}}{2(2)}$$

$$Z = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 104}}{4}$$

$$Z = \frac{5 \pm \sqrt{-79}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{79}i}{4}$$

أما  $Z = \frac{5 + \sqrt{79}i}{4}$

أو  $Z = \frac{5 - \sqrt{79}i}{4}$

مثال 1 جد مجموعة حل المعادلة الآتية في

$$x^2 + 4x + 5 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$a = 1$$

$$b = 4$$

$$c = 5$$

$$x = \frac{-(4) \pm \sqrt{(4)^2 - 4(1)(5)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-4 \pm 2i}{2}$$

أما  $x = \frac{-4 + 2i}{2} \Rightarrow x = -2 + i$

أو  $x = \frac{-4 - 2i}{2} \Rightarrow x = -2 - i$



مثال 4 جد مجموعة حل المعادلة:

$$Z^2 - 3Z + 3 + i = 0$$

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= -3 \\ c &= 3 + i \end{aligned}$$

$$Z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$Z = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(3+i)}}{2(1)}$$

$$Z = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 12 - 4i}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{-3 - 4i}}{2}$$

$$\sqrt{-3 - 4i} = x + yi \quad \text{بالتربيع}$$

$$-3 - 4i = (x^2 - y^2) + 2xyi$$

$$x^2 - y^2 = -3 \quad \dots\dots(1)$$

$$[2xy = -4] \div 2x \Rightarrow y = \frac{-2}{x} \quad \dots\dots(2)$$

$$x^2 - y^2 = -3 \Rightarrow x^2 - \left(\frac{-2}{x}\right)^2 = -3$$

$$\left[x^2 - \frac{4}{x^2} = -3\right] \cdot x^2 \Rightarrow x^4 - 4 = -3x^2$$

$$x^4 + 3x^2 - 4 = 0$$

$$(x^2 + 4)(x^2 - 1) = 0$$

$$\underline{\text{أما}} \quad x^2 + 4 = 0 \quad \text{يُهمل} \quad x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$y = \frac{-2}{x} = \frac{-2}{\pm 1} = \pm 2 \Rightarrow \pm(1 - 2i)$$

$$Z = \frac{3 \pm (1 - 2i)}{2} \begin{cases} Z = \frac{3 + (1 - 2i)}{2} = 2 - i \\ Z = \frac{3 - (1 - 2i)}{2} = 1 + i \end{cases}$$

مثال 3 حل المعادلة في C

$$Z^2 - 2Zi + 3 = 0$$

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= -2i \\ c &= 3 \end{aligned}$$

$$Z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$Z = \frac{-(-2i) \pm \sqrt{(-2i)^2 - 4(1)(3)}}{2(1)}$$

$$Z = \frac{2i \pm \sqrt{4i^2 - 12}}{2}$$

$$Z = \frac{2i \pm \sqrt{-4 - 12}}{2} = \frac{2i \pm \sqrt{-16}}{2}$$

$$Z = \frac{2i \pm 4i}{2}$$

$$\underline{\text{أما}} \quad Z = \frac{2i + 4i}{2} = \frac{6i}{2} = 3i$$

$$\underline{\text{أو}} \quad Z = \frac{2i - 4i}{2} = \frac{-2i}{2} = -i$$

ملاحظة إذا كان الجذر  $\sqrt{b^2 - 4ac}$  فقط

عدد سالب لا نستخدم الفرضية كما في مثال (1) و (2) و (3) حيث قمنا باستخراج الجذر التربيعي للعدد السالب كما تعلمنا في بداية الفصل.

أما إذا كان الجذر  $\sqrt{b^2 - 4ac}$  يحوي (i) نأخذ الجذر ونجده بطريقة الفرضية كما في المثال (4) و (5).



مثال 5 جد مجموعة حل المعادلة:

$$x^2 - \left(\frac{-4}{x}\right)^2 = 0 \Rightarrow \left[x^2 - \frac{16}{x^2} = 0\right] \cdot x^2$$

$$x^4 - 16 = 0$$

$$(x^2 + 4)(x^2 - 4) = 0$$

$$\text{أما } x^2 + 4 = 0 \text{ يُهمل } \notin \mathbb{R}$$

$$\text{أو } x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \text{ بالجزر}$$

$$x = \pm 2$$

$$y = \frac{-4}{x} = \frac{-4}{\pm 2} = \pm 2$$

$$\sqrt{-8i} = \pm(2 - 2i)$$

$$Z = \frac{-2 \mp (2 - 2i)}{2}$$

$$\text{أما } Z = \frac{-\cancel{2} + \cancel{2} - 2i}{2} = \frac{-2i}{2} = -i$$

$$\text{أو } Z = \frac{-2 - 2 + 2i}{2} = \frac{-4 + 2i}{2} = -2 + i$$

$$Z^2 + 2Z + i(2 - i) = 0$$

$$Z^2 + 2Z + 2i - i^2 = 0$$

$$a = 1$$

$$Z^2 + 2Z + (1 + 2i) = 0$$

$$b = 2$$

$$c = 1 + 2i$$

$$Z = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$Z = \frac{-(2) \mp \sqrt{(2)^2 - 4(1)[1 + 2i]}}{2(1)}$$

$$Z = \frac{-2 \mp \sqrt{4 - 4 - 8i}}{2}$$

$$Z = \frac{-2 \mp \sqrt{-8i}}{2}$$

2017 - د (2) / تطبيقي موصل

(( نجد  $\sqrt{-8i}$  كما فعلنا سابقاً )) لوجود  $i$  داخل الجذر

$$\sqrt{0 - 8i} = x + yi \text{ بالتربيع}$$

$$0 - 8i = (x^2 - y^2) + 2xyi$$

$$x^2 - y^2 = 0 \dots\dots(1)$$

$$[2xy = -8] \div 2x \Rightarrow y = \frac{-4}{x} \dots\dots(2)$$

$$x^2 - y^2 = 0$$

هنا تعوض



إذا أعطى المعادلة بطريقة مجموع مربعين نحلل كما تعلمنا طريقة تحليل مجموع مربعين .

ملاحظة

حل المعادلة  $Z^2 = -12$

مثال 7

بالجذر  $Z^2 = -12$

$Z^2 = -12$

$Z = \sqrt{-12}$

$Z = \sqrt{12} \cdot \sqrt{-1}$

$Z = \sqrt{12}i \Rightarrow Z = \pm 2\sqrt{3}i$

حل المعادلة  $4Z^2 + 25 = 0$

مثال 6

نضرب  $(-i^2)$

$4Z^2 - 25i^2 = 0$

$(2Z - 5i)(2Z + 5i) = 0$

أما  $2Z + 5i = 0 \Rightarrow [2Z = -5i] \div 2$

$Z = \frac{-5}{2}i$

أو  $2Z - 5i = 0 \Rightarrow [2Z = 5i] \div 2$

$Z = \frac{5}{2}i$

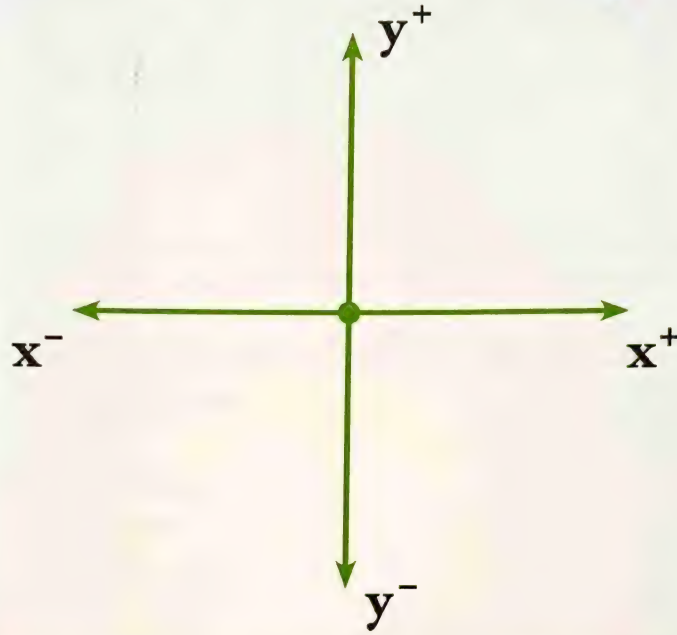
## الرياضيات



## التمثيل الهندسي للأعداد المركبة

العدد المركب  $a + bi$  يمكن كتابته بشكل زوج مرتب  $P(a, b)$

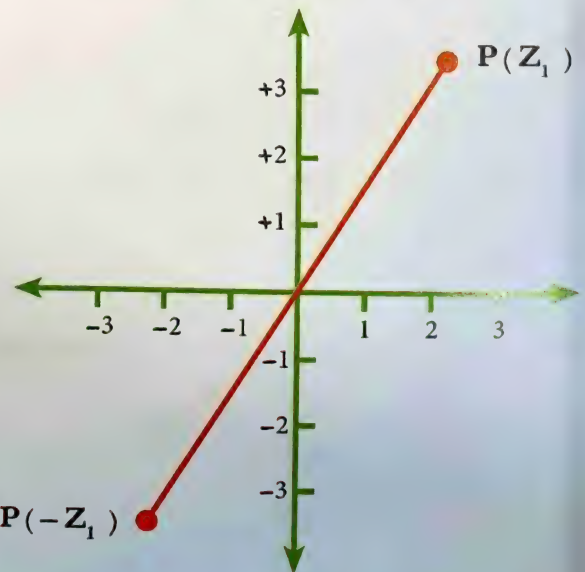
\*مراجعة المستوي الاحدائي:



**مثال 1** أكتب النظير الجمعي لكل من الأعداد التالية ثم مثل هذه الأعداد ونظائرها الجمعية على شكل ارجاند:

1  $Z_1 = 2 + 3i \rightarrow (2, 3)$

$-Z_1 = -2 - 3i \rightarrow (-2, -3)$



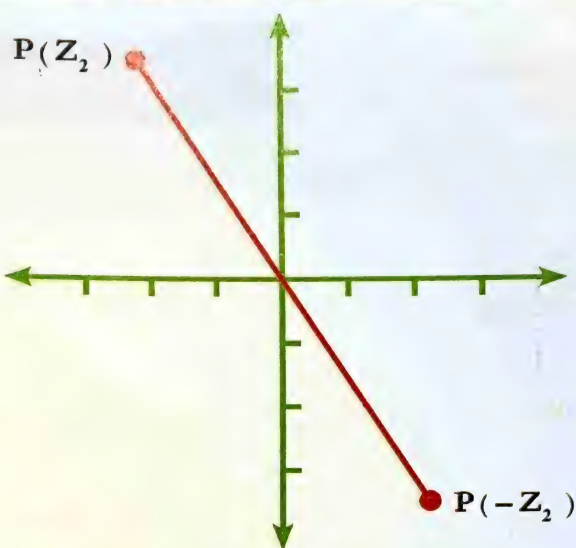
**تذكر** النظير الجمعي نقلب اشارة

الجزئين الحقيقي والتخيلي.



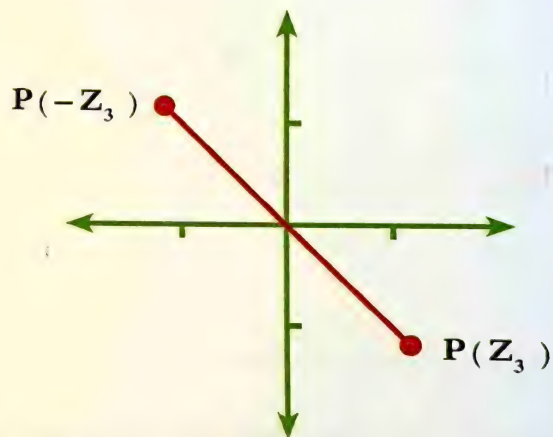
2  $Z_2 = -1 + 3i \rightarrow (-1, 3)$

$-Z_2 = +1 - 3i \rightarrow (1, -3)$



3  $Z_3 = 1 - i \rightarrow (1, -1)$

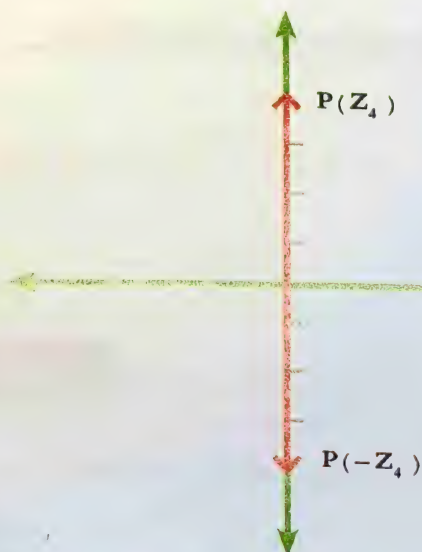
$-Z_3 = -1 + i \rightarrow (-1, 1)$



4  $Z_4 = 4i$

$Z_4 = 0 + 4i \rightarrow (0, 4)$

$-Z_4 = 0 - 4i \rightarrow (0, -4)$





مثال 2

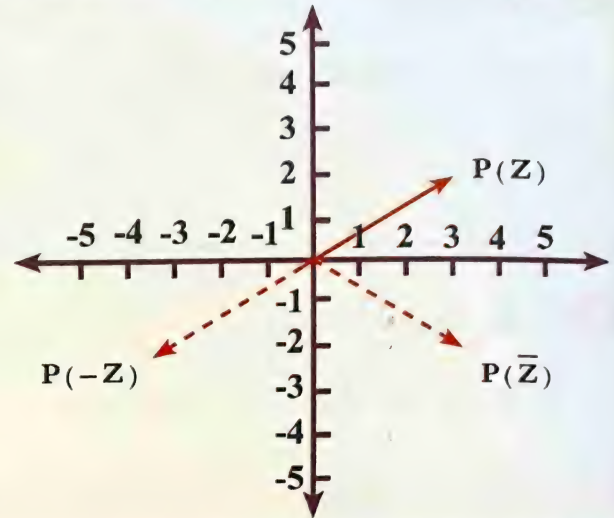
إذا كان  $(Z = 4 + 2i)$  فوضح على شكل ارجاند كلاً من:

$Z, \bar{Z}, -Z$

$Z = 4 + 2i \rightarrow (4, 2)$

$\bar{Z} = 4 - 2i \rightarrow (4, -2)$

$-Z = -4 - 2i \rightarrow (-4, -2)$

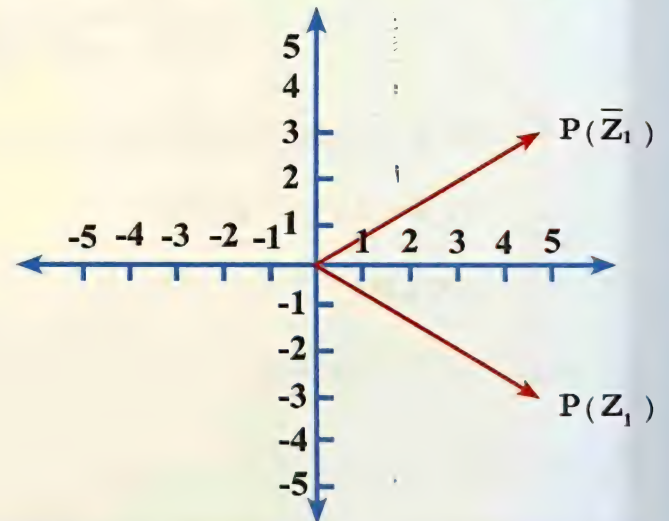


مثال 3

اكتب العدد المرافق لكل من الأعداد الآتية ثم مثلها على شكل ارجاند:

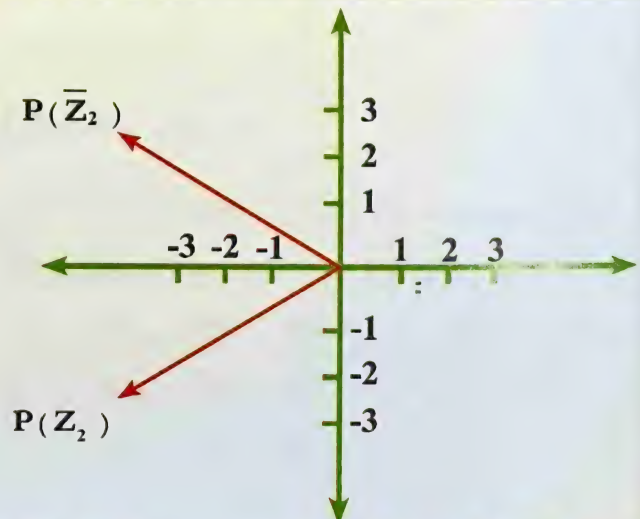
1  $Z_1 = 5 + 3i \rightarrow (5, 3)$

$\bar{Z}_1 = 5 - 3i \rightarrow (5, -3)$



2  $Z_2 = -3 + 2i \rightarrow (-3, 2)$

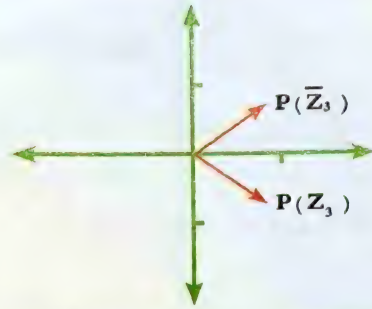
$\bar{Z}_2 = -3 - 2i \rightarrow (-3, -2)$





2  $Z_3 = 1 - i \rightarrow (1, -1)$

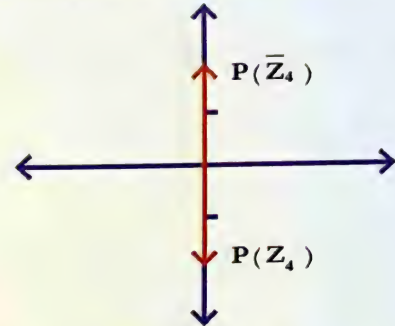
$\bar{Z}_3 = 1 + i \rightarrow (1, 1)$



3  $Z_4 = -2i$

$Z_4 = 0 - 2i \quad (0, -2)$

$\bar{Z}_4 = 0 + 2i \quad (0, 2)$



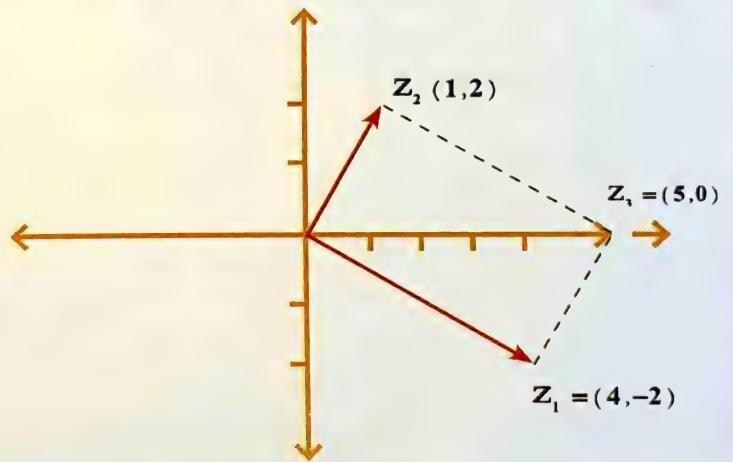
مثال 4 إذا كانت  $Z_1 = 4 - 2i$  و  $Z_2 = 1 + 2i$  مثل على شكل ارجاند  $Z_1 + Z_2$ .

$$\begin{aligned} Z_1 + Z_2 &= (4 - 2i) + (1 + 2i) \\ &= (4 + 1) + (-2 + 2i) \\ &= 5 + 0i \end{aligned}$$

$Z_1 = 4 - 2i \quad (4, -2)$

$Z_2 = 1 + 2i \quad (1, 2)$

$Z_3 = 5 + 0i \quad (5, 0)$



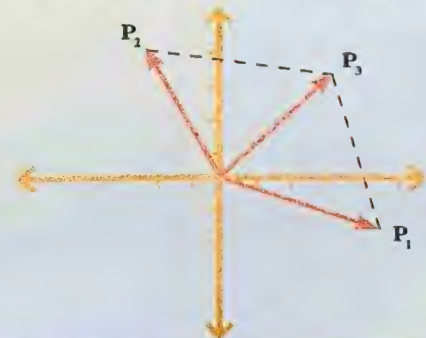
مثال 5 إذا كانت  $Z_1 = 6 - 2i$  و  $Z_2 = 2 - 5i$  مثل على شكل ارجاند  $Z_1 - Z_2$ .

$$\begin{aligned} Z_1 - Z_2 &= (6 - 2i) - (2 - 5i) \\ &= (6 - 2i) + (-2 + 5i) = 4 + 3i \end{aligned}$$

$P_1(Z_1) = P_1(6, -2)$

$P_2(Z_2) = P_2(-2, 5)$

$P_3(Z_3) = P_3(4, 3)$





مراجعة

$\theta$	$\sin \theta$	$\cos \theta$
$0^\circ$	0	1
$2\pi = 360^\circ$	0	1
$\frac{\pi}{2} = 90^\circ$	1	0
$\pi = 180^\circ$	0	-1

$\theta$	$\sin \theta$	$\cos \theta$
$\frac{3\pi}{2} = 270^\circ$	-1	0
$\frac{\pi}{6} = 30^\circ$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{3} = 60^\circ$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4} = 45^\circ$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

إيجاد قيم  $(\cos \theta - \sin \theta)$  لبعض الزوايا

أولاً:  $n\pi$  ←  $n$  فردي نعتبر الزاوية  $\pi$   
 $n\pi$  ←  $n$  زوجي نعتبر الزاوية صفر

$$\sin 20\pi = \sin 0 = 0$$

$$\cos 22\pi = \cos 0 = 1$$

$$\sin 10\pi = \sin 0 = 0$$

$$\cos 13\pi = \cos \pi = -1$$

$$\cos 15\pi = \cos \pi = -1$$

$$\sin 55\pi = \sin \pi = 0$$

((  $n$  عدد زوجي اعتبرنا الزاوية صفر ))

((  $n$  فردي اعتبرنا الزاوية  $\pi$  ))

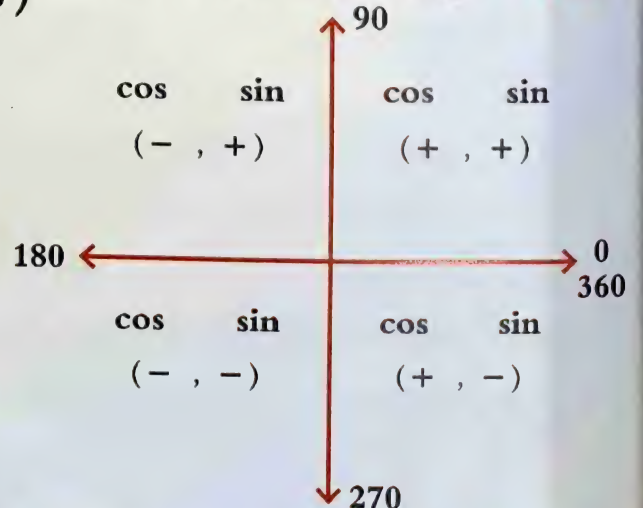
ثانياً: الزوايا التابعة للزوايا الخاصة  $(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3})$ :

مثلاً:  $\frac{5\pi}{6}$ ,  $\frac{3\pi}{4}$ ,  $\frac{5\pi}{4}$ ... الخ.

1 نهل العدد في البسط وناخذ الزاوية الخاصة

فقط  $(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3})$  ونجد  $\frac{\sin}{\cos}$

2 نضرب العدد  $\times$  الزاوية ونحدد الربع ونضع الاشارات.





مثال جد:  $\cos \frac{5\pi}{6}$

نعمل الـ (5) ونجد  $\cos \frac{\pi}{6}$  وهو  $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  من الجدول

الآن نضرب  $150 = 5 \times 30$  وهي في الربع الثاني الـ  $\cos$  سالب  $\leftarrow \cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

مثال جد:  $\sin \frac{7\pi}{4}$

نعمل الـ (7) ونجد  $\frac{\pi}{4}$  وهو  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  من الجدول.

الآن نضرب  $315 = 7 \times 45$  وهي في الربع الرابع الـ  $(\sin)$  سالب  $\leftarrow \sin \frac{7\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

ثالثاً: إذا كان البسط أكبر من ضعف المقام نقسم البسط على المقام ويجب ان يكون الناتج زوجي وسوف اوضح الطريقة في المثال.

3  $\sin \frac{47\pi}{4}$

$$\begin{array}{r} 11 \\ 4 \overline{) 47} \\ \underline{4} \phantom{0} \\ 07 \\ \underline{4} \phantom{0} \\ 3 \end{array}$$

لأن الناتج فردي نعيد القسمة ونجعل الناتج زوجي (دائماً)

$\sin \frac{47\pi}{4}$   $\rightarrow$   $\sin \frac{7\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$  (نفس الطريقة أعلاه)

1  $\cos \frac{49\pi}{4}$

← ناتج زوجي (o.k)

$$\begin{array}{r} 12 \\ 4 \overline{) 49} \\ \underline{4} \phantom{0} \\ 09 \\ \underline{8} \phantom{0} \\ 1 \end{array}$$

$\cos \frac{1\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

نضع الباقي في البسط

2  $\sin \frac{37\pi}{6}$

← زوجي o.k

$$\begin{array}{r} 6 \\ 6 \overline{) 37} \\ \underline{36} \phantom{0} \\ 1 \end{array}$$

$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

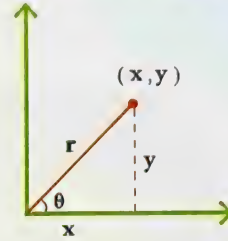


## المقياس والقيمة الاساسية لسعة العدد المركب - الصيغة القطبية

$$Z = x + yi \Rightarrow Z = (x, y)$$

أولاً: إذا طلب المقياس والسعة للعدد المركب

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \dots\dots (1)$$



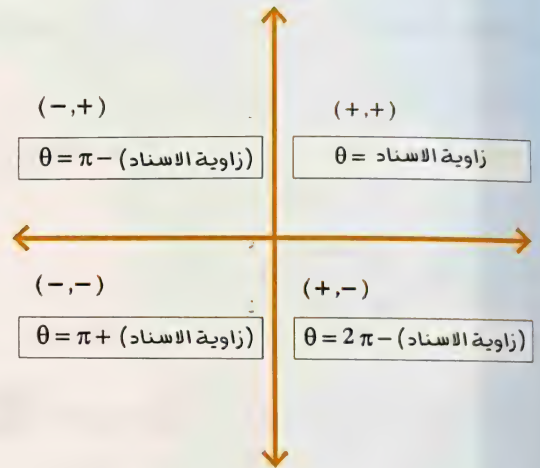
$$\cos \theta = \frac{x}{r}$$

$\dots\dots (2)$

$$\sin \theta = \frac{y}{r}$$

$\dots\dots (3)$

نجد زاوية الاسناد  
بالاستعانة بالجدول  
((ونحدد الربع))



يرمز للمقياس بالرمز  $r$  أو  $\|Z\|$  ويُقرأ  $\text{Mod}(Z)$  ، ويرمز للسعة بالرمز  $\theta$  وتكتب  $\text{org}(Z)$  أو  $\theta$

ثانياً: الصيغة القطبية: هناك صيغة أخرى للعدد المركب وهي الصيغة القطبية والتي

$$Z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

تكتب بالشكل:

\* لاستخراج الصيغة القطبية يجب علينا ايجاد كل من السعة  $\theta$  ، المقياس  $r$  وذلك حسب الملاحظات المذكورة اعلاه

\* يجب وضع العدد المركب بصيغة  $a + bi$  أي الصيغة العددية للعدد المركب ثم نبدأ بتطبيق القوانين اعلاه (1) و (2) و (3).



**مثال 2** إذا كان  $Z = -1 - i$  فجد البقياس والقيمة الأساسية لسعة  $Z$ .

الربع الثالث  $Z = -1 - i \rightarrow Z = \left( \frac{-1}{x}, \frac{-1}{y} \right)$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1}$$

$$r = \sqrt{2} \text{ (البقياس)}$$

$$\left[ \begin{array}{l} \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{زاوية الأسناد هي} \\ \frac{\pi}{4} \\ \text{في الربع الثالث} \end{array}$$

السعة  $\theta = \pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{4}$  توحيد مقام

**مثال 1** إذا كان  $Z = 1 + \sqrt{3}i$  فجد البقياس والقيمة الأساسية لسعة  $Z$ .

الربع الأول  $Z = 1 + \sqrt{3}i \rightarrow Z = \left( \frac{1}{x}, \frac{\sqrt{3}}{y} \right)$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

(2006 - د 2)

$$r = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4}$$

$$r = 2 \text{ (البقياس)}$$

$$\left[ \begin{array}{l} \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{زاوية الأسناد هي} \\ \frac{\pi}{3} \\ \text{في الربع الأول} \end{array}$$

السعة  $\theta = \text{زاوية الأسناد} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

**مثال 4** ضح العدد  $2\sqrt{3} - 2i$  بالصيغة القطبية.

(2012 - د 2) (2014 - نازحين) (2013 - د 1) خارج القطر

«الربع الرابع»  $2\sqrt{3} - 2i \rightarrow (2\sqrt{3}, -2)$  (x, y)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = \sqrt{12+4} = \sqrt{16} \Rightarrow r = 4$$

$$\left[ \begin{array}{l} \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{زاوية الأسناد} \\ \frac{\pi}{6} \\ \text{ربع رابع} \end{array}$$

توحيد مقام  $\theta = 2\pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow \theta = \frac{11\pi}{6}$

$$Z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$Z = 4 \left( \cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right)$$

**مثال 3** قهر عن العدد المركب  $-2 + 2i$  بالصيغة القطبية.

(2013 - د 1)

«الربع الثاني»  $-2 + 2i \rightarrow (-2, 2)$  (x, y)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

(البقياس)

$$r = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} \Rightarrow r = 2\sqrt{2}$$

$$\left[ \begin{array}{l} \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{زاوية الأسناد} \\ \frac{\pi}{4} \\ \text{الربع الثاني} \end{array}$$

توحيد مقام  $\theta = \pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4}$

$$Z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$Z = 2\sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$



**ثالثاً:** إذا أعطى المقياس والقيمة الأساسية للسعة ويطلب العدد المركب:

\* إذا لم يعطى زاوية مباشرة فراجع طريقة إيجاد قيم

$$x = r \cos \theta$$

$$\sin \theta \cos \theta$$

$$Z = x + yi$$

حيث

$$y = r \sin \theta$$

$$Z = \text{الجزء الحقيقي} + i \text{الجزء التخيلي}$$

**مثال 2** إذا كان مقياس عدد مركب  $4$  والقيمة الأساسية لسعته  $\left(\frac{11\pi}{6}\right)$  جد العدد بصورة  $a + bi$

$$r = 4, \theta = \frac{11\pi}{6}$$

$$x = r \cos \theta$$

$$x = 4 \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)$$

$$x = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow x = 2\sqrt{3} \text{ الجزء الحقيقي}$$

$$y = r \sin \theta$$

$$y = 4 \sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)$$

$$y = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow y = -2 \text{ الجزء التخيلي}$$

$$Z = x + yi \Rightarrow Z = \text{الجزء الحقيقي} + i \text{الجزء التخيلي}$$

$$Z = 2\sqrt{3} - 2i$$

**مثال 1** عدد مركب مقياسه  $(2\sqrt{2})$  والقيمة الأساسية للسعة  $\left(\frac{3\pi}{4}\right)$  جد العدد بصورة  $a + bi$

$$r = 2\sqrt{2}, \theta = \frac{3\pi}{4}$$

$$x = r \cos \theta$$

$$x = 2\sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$x = 2\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow x = -2 \text{ الجزء الحقيقي}$$

$$y = r \sin \theta$$

$$y = 2\sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$y = 2\sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow y = 2 \text{ الجزء التخيلي}$$

$$Z = x + yi \Rightarrow Z = \text{الجزء الحقيقي} + i \text{الجزء التخيلي}$$

$$Z = -2 + 2i$$

**فكرة إثرائية:** يمكن ربط هذه الحالة مع موضوع تكوين المعادلة التربيعية وكما في المثال

التالي:



إذا علمت ان  $Z = -1 + hi$  عدد مركب القيمة الاساسية لسعته  $\frac{3\pi}{4}$  جد قيمة (h).

مثال  
إضافي

$$Z = -1 + hi \Rightarrow (-1, h) \Rightarrow x = -1, y = h$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r}$$

$$\cos \frac{3\pi}{4} = \frac{-1}{r}$$

$$\frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-1}{r} \Rightarrow r = \sqrt{2}$$

$$y = r \sin \theta$$

$$y = \sqrt{2} \cdot \sin \left( \frac{3\pi}{4} \right)$$

$$y = \sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \Rightarrow y = 1, h = 1$$

### تحذير هام جدا

أن مطبعة المغرب (ملازم دار المغرب) هي دار نشر قانونية مثبتة لدى وزارة الصناعة، وعليه نحذر من عملية التلاعب بطباعة مؤلفاتنا واستنساخها أو نشرها على الانترنت، فهناك عقوبات بحق هذا التجاوز والتعدي على طباعتنا وجهدنا وفق القانون العراقي المرقم ٢١ لسنة ١٩٥٧ والمعدل برقم ٨٠ في سنة ٢٠٠٤ وللمحكمة حق مصادرة المنتجات المخالفة والبضائع وعنوان المكتبة ووسائل التغليف والأوراق، وتذكر أن كل ما بين يديك هو جهد واجتهاد شخصي من الاستاذ والمطبعة وفق الإتفاق المبرم، وعليه لا نخول شرعاً وقانوناً استنساخ أو نشر المزمرة أو أي جزء منها.

مثال  
تكون المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية والتي أحد جذورها مقياسه (2) وسعته الاساسية  $\left( \frac{5\pi}{3} \right)$

ملاحظة  
يجب أن نجد العدد المركب وهو أحد جذور المعادلة أما الجذر الآخر فهو مرافقة لأن المعادلة ذات معاملات حقيقية.

$$x = r \cos \theta$$

$$x = 2 \cos \left( \frac{5\pi}{3} \right)$$

$$x = 2 \left( \frac{1}{2} \right) \Rightarrow x = 1$$

$$y = r \sin \theta$$

$$y = 2 \sin \left( \frac{5\pi}{3} \right)$$

$$y = 2 \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \Rightarrow y = -\sqrt{3}$$

$$Z = x + yi \Rightarrow Z_1 = 1 - \sqrt{3}i$$

$$Z_2 = 1 + \sqrt{3}i \text{ الجذر الآخر}$$

$$\text{مجموع الجذرين} = (1 - \sqrt{3}i) + (1 + \sqrt{3}i) = 2$$

$$\begin{aligned} \text{حاصل ضرب الجذرين} &= (1 - \sqrt{3}i)(1 + \sqrt{3}i) \\ &= (1)^2 - (\sqrt{3})^2 \\ &= 1 - 3 = -2 \end{aligned}$$

$$x^2 - 2x + 4 = 0$$



### مبرهنة دي موافر

أولاً: إذا كان لدينا  $(a + bi)^n$  حيث  $n$  عدد صحيح (ليس كسراً).

$$Z^n = r^n [\cos \theta + i \sin \theta]^n \Rightarrow Z^n = r^n [\cos(\theta \cdot n) + i \sin(\theta \cdot n)]$$

#### ملاحظة

إذا كان  $n$  عدد صحيح سالب تصبح العلاقة:

$$Z^{-n} = r^{-n} [\cos(\theta \cdot n) - i \sin(\theta \cdot n)]$$

$$\cos(-\theta) = \cos \theta$$

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta$$

أي أن السالب الذي مع الزاوية يُهمل مع دالة  $\cos$  ويتم وضعه قبل دالة  $\sin$

#### ملاحظة

لحل سؤال دي موافر وكان الاس عدد صحيح يجب توفير ثلاث اركان وهي  
 $r$  المقياس ،  $\theta$  السعة ،  $n$  وهو اس القوس  
 وقد تعلمت سابقاً كيف تجد  $r$  و  $\theta$  . ثم تطبق قانون مبرهنة دي موافر أعلاه.

## الرياضيات



**الجزء الأول:** يعطي صيغة قطبية جاهزة ما عليك سوى ضرب (الأس × الزاوية) كما في الأمثلة التالية:

**مثال 1**

أحسب:

$$\begin{aligned} 1 \quad & \left[ \cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8} \right]^4 \\ &= \cos \left( \frac{3\pi}{8} \cdot 4 \right) + i \sin \left( \frac{3\pi}{8} \cdot 4 \right) \\ &= \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \\ &= 0 + i(-1) = 0 - i \end{aligned}$$

**مثال 2**

بسط ما يلي:

$$\begin{aligned} 1 \quad & \frac{(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)^5}{(\cos 3\theta + i \sin 3\theta)^3} \\ &= \frac{(\cos \theta + i \sin \theta)^{10}}{(\cos \theta + i \sin \theta)^9} = (\cos \theta + i \sin \theta) \end{aligned}$$

1- لا يمكن ان نستخدم قانون عند القسمة  
نطرح الاسس لأن الاقواس مختلفة، لذلك سوف  
نضرب العدد الذي بجانب  $\theta$  (معامل  $\theta$ ) بأس  
القوس (( عكس العملية السابقة بالضبط )) .

$$\begin{aligned} & \frac{(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)^5}{(\cos 3\theta + i \sin 3\theta)^3} \rightarrow \begin{array}{l} \text{2- لا تأتي هذه} \\ \text{المعاملات مختلفة} \end{array} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \quad & (\cos \theta + i \sin \theta)^8 (\cos \theta - i \sin \theta)^4 \\ &= (\cos \theta + i \sin \theta)^8 (\cos \theta + i \sin \theta)^{-4} \\ &= (\cos \theta + i \sin \theta)^4 = \cos 4\theta + i \sin 4\theta \end{aligned}$$

2015 د (1) خارج

"توضيح"

$$\cos \theta - i \sin \theta = (\cos \theta + i \sin \theta)^{-1}$$

\* بمعنى ان الصيغة القطبية اعلاه إذا  
كانت تحمل اشارة سالبة ثقلب الى اشارة  
موجبة ونعكس اشارة الاس

$$2 \quad \left[ \cos \frac{5\pi}{24} + i \sin \frac{5\pi}{24} \right]^4 \quad \text{2012 - تمهيدي}$$

$$\begin{aligned} &= \cos \left( \frac{5\pi}{24} \cdot 4 \right) + i \sin \left( \frac{5\pi}{24} \cdot 4 \right) \\ &= \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \end{aligned}$$

$$3 \quad \left[ \cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right]^{-3} \quad \begin{array}{l} \text{2015 د (1) خارج} \\ \text{2017 د (1) خارج / أحيائي} \end{array}$$

$$\begin{aligned} &= \cos \left( \frac{7\pi}{12} \cdot (-3) \right) + i \sin \left( \frac{7\pi}{12} \cdot (-3) \right) \\ &= \cos \left( -\frac{7\pi}{4} \right) + i \sin \left( -\frac{7\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

انتبه! السالب يهمل مع  $\cos$  ويتم وضع

السالب قبل ال  $\sin$

$$= \cos \frac{7\pi}{4} - i \sin \frac{7\pi}{4}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} - \left( \frac{1}{\sqrt{2}} i \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i$$

الاشارة الاصلية



**الجزء الثاني:** إذا أعطى عدد مركب مرفوع الى اس صحيح (الأس سالب أو موجب) فيجب علينا ان نتبع الخطوات التالية :

- 1 تبسيط العدد المركب الموجود داخل القوس وجعله بالصيغة العادية للعدد المركب (الاسئلة الثلاث الموجودة في المنهج والتي سوف نتطرق اليها لاحقاً تبسيط لان داخل القوس عدد مركب بالصيغة العادية) .
- 2 نقوم بايجاد المقياس والسعة كما تعلمنا سابقاً .
- 3 بعد توفير الاركان الثلاث نطبق قانون مبرهنة ديهوفر .

$$Z^n = r^n [\cos \theta + i \sin \theta]^n \Rightarrow Z^n = r^n [\cos(\theta \cdot n) + i \sin(\theta \cdot n)]$$

قانون ديهوفر

$$Z^n = r^n (\cos \theta + i \sin \theta)^n$$

التعويض بالاركان الثلاث

$$Z^{11} = (\sqrt{2})^{11} \left[ \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right]^{11}$$

ضرب الاس في الزاوية (كما في الجزء الاول من الموضوع)

$$Z^{11} = 32 \sqrt{2} \left( \cos \frac{11\pi}{4} + i \sin \frac{11\pi}{4} \right)$$

تبسيط الزاوية

$$= 32 \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$

النتيجة

$$= 32 \sqrt{2} \left( \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i \right) = -32 + 32 i$$

(2). 2015

2019 - تمهيدي / تطبيقي

**مثال 1** أحسب باستخدام ديهوفر  $(1+i)^{11}$

$$1+i \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{x,y}$$

((الربع الأول))

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

الركن الأول (r)

$$r = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} \Rightarrow r = \sqrt{2}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

زاوية الأسناد

$$\frac{\pi}{4}$$

الربع الأول

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

الركن الثاني

الركن الثالث n=11



مثال 3 أحسب باستخدام دي موافر  $(\sqrt{3}+i)^{-9}$

الربع الأول  $\sqrt{3}+i \rightarrow (\sqrt{3}, 1)$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

(2014 د - 2)

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4}$$

$$r = 2$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{زاوية الأسناد}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{2} \quad \text{الربع الأول} \quad \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$Z^n = r^n (\cos \theta + i \sin \theta)^n$$

$$Z^{-9} = (2)^{-9} \left[ \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right]^{-9}$$

يخرج قبل sin  $\rightarrow$  يُعْمَل

$$= \frac{1}{2^9} \left[ \cos \frac{-9\pi}{6} + i \sin \frac{-9\pi}{6} \right]$$

$$= \frac{1}{512} \left( \cos \frac{3\pi}{2} - i \sin \frac{3\pi}{2} \right) \quad \text{تذكر} \quad \frac{3\pi}{2} = 270^\circ$$

$$= \frac{1}{512} (0 - (-1)i)$$

$$= 0 + \frac{1}{512}i$$

مثال 2 أحسب باستخدام دي موافر  $(1-i)^7$

الربع الرابع  $1-i \rightarrow (1, -1)$

الركن الأول (r)  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$r = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} \rightarrow r = \sqrt{2}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{زاوية الأسناد}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \quad \frac{\pi}{4} \quad \text{الربع الرابع}$$

الركن الثالث  $\theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta = \frac{7\pi}{4}, n=7$

قانون دي موافر  $Z^n = r^n (\cos \theta + i \sin \theta)^n$

تعويض

$$Z^7 = (\sqrt{2})^7 \left[ \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right]^7$$

الاس  $\times$  الزاوية

$$Z^7 = 8\sqrt{2} \left( \cos \frac{49\pi}{4} + i \sin \frac{49\pi}{4} \right)$$

تبسيط الزاوية

$$= 8\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

الناتج

$$= 8\sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = 8 + 8i$$

2015 د - (1) خارج

2012 د - (1)

2017 د - (2) تطبيقي

2013 - تمهيدي



## نتيجة مبرهنة ديموافر

عندما يكون اس القوس كسر وبشكل  $(\frac{1}{n})$  أي ان الكسر بسطه  $= 1$  يكون السؤال نتيجة ديموافر.

$$Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} [\cos \theta + i \sin \theta]^{\frac{1}{n}} \Rightarrow Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left[ \cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right]$$

\* ولحل سؤال النتيجة توفير أربع اركان وهي:

$k = 0, 1, 2, \dots, n-1$  , مقام الاس  $n$  , السعة  $\theta$  , المقياس  $r$

### ملاحظة

عندما يطلب (الجذور التربيعية - التكعيبية - الجذور الاربعة ... الخ) لعدد مركب غير مرفوع الى اس يعني نتيجة والاس كسر ولا يعطي قوس في هذه الحالة انت عليك التمييز:

$k$  نقتف قبل الـ  $n$  برقم كما  
تلاحظ الامثلة التوضيحية

معناها	$\Rightarrow (a + bi)^{\frac{1}{2}}$	$\rightarrow n = 2, k = 0, 1$	جذور تربيعية
معناها	$\Rightarrow (a + bi)^{\frac{1}{3}}$	$\rightarrow n = 3, k = 0, 1, 2$	جذور تكعيبية
معناها	$\Rightarrow (a + bi)^{\frac{1}{4}}$	$\rightarrow n = 4, k = 0, 1, 2, 3$	جذور الأربعة

\* إذا كان العدد المركب مرفوع الى اس كسر ولكن (البسط  $\neq 1$ ) للأس فيكون السؤال (مبرهنة ونتيجة).

مثلاً	$(a + bi)^{\frac{3}{2}} = [(a + bi)^3]^{\frac{1}{2}}$	$\left\{ \begin{array}{l} (a + bi)^3 \\ ( \text{نتيجة المبرهنة} )^{\frac{1}{2}} \end{array} \right.$
مثلاً	$(a + bi)^{-\frac{5}{2}} = [(a + bi)^{-5}]^{\frac{1}{2}}$	$\left\{ \begin{array}{l} (a + bi)^{-5} \\ ( \text{نتيجة ديموافر} )^{\frac{1}{2}} \end{array} \right.$
مثلاً	$(a + bi)^{-\frac{2}{3}} = [(a + bi)^{-2}]^{\frac{1}{3}}$	$\left\{ \begin{array}{l} (a + bi)^{-2} \text{ مبرهنة} \\ ( \text{نتيجة} )^{\frac{1}{3}} \end{array} \right.$

### انتبه!

ضع إشارة السالب مع القوس الداخلي (مع المبرهنة) مهما كان موقع السالب في الأس.

\* عند قراءة الملاحظة الأخيرة انظر الى سؤال 2017 دور أول فيه شرح مفصل لهذه الحالة (سؤال 20) في

الاسئلة الوزارية.



مثال 1

جد الجذور التربيعية للعدد

المركب  $-1 + \sqrt{3}i$  باستخدام نتيجة مبرهنة ديهوفر.

$$k=1, \frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi}{2} = \frac{\frac{2\pi + 6\pi}{3}}{2} = \frac{4\pi}{3}$$

$$Z_2 = \sqrt{2} \left( \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)$$

$$Z_2 = \sqrt{2} \left( -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i$$

2017 - د (1) تطبيقي / موصل 2017 - د (3) أحياني

صيغة أخرى للسؤال

حل المعادلة  $x^2 + 1 - \sqrt{3}i = 0$  باستخدام نتيجة مبرهنة ديهوفر

نقل المعاليم في طرف والمجاهيل في طرف

بالجذر التربيعي  $x^2 = -1 + \sqrt{3}i$

$$x = \sqrt{-1 + \sqrt{3}i} = (-1 + \sqrt{3}i)^{\frac{1}{2}}$$

ثم نكمل الحل كما في السابق

\* إذا كانت قيمة زاوية الاسناد المستخرجة من الجدول هي  $(\pi, 2\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$  لانطبق القوانين الاربعة لان هذه الزوايا تقع على الحدود بين الارباع لذلك تكون هي  $\theta$  وزاوية الاسناد بنفس الوقت. في الامثلة التالية سوف تصادفنا هذه الزوايا.

(x, y)  
الربع الثاني  $-1 + \sqrt{3}i \Rightarrow (-1, \sqrt{3})$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2}$$

$$r = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} \Rightarrow r = 2$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-1}{2} \quad \left. \begin{array}{l} \text{زاوية الاسناد} \\ \frac{\pi}{3} \\ \text{الربع الثاني} \end{array} \right\} \sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$$

الاركان الاربعة

$$r = 2, \theta = \frac{2\pi}{3}, n = 2, k = 0, 1$$

$$Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} [\cos \theta + i \sin \theta]^{\frac{1}{n}}$$

$$Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left[ \cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right]$$

$$k = 0, \frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{\frac{2\pi}{3} + 0}{2} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

$$Z_1 = 2^{\frac{1}{2}} \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$Z_1 = \sqrt{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i$$



مثال 2

جد الجذور التكعيبية للعدد

المركب  $27i$  باستخدام نتيجة مبرهنة دي موافر.

$$0 + 27i \Rightarrow (0, 27)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(0)^2 + (27)^2} = \sqrt{27^2}$$

$$r = 27$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{0}{27} = 0$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{27}{27} = 1$$

$$Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left[ \cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right]$$

$$\text{عندما } k=0, \frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{\frac{\pi}{2} + 0}{3} = \frac{\pi}{6}$$

$$Z_1 = 27^{\frac{1}{3}} \left[ \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right]$$

$$Z_1 = 3 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

$$\text{عندما } k=1, \frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3} = \frac{\frac{\pi+4\pi}{2}}{3} = \frac{5\pi}{6}$$

$$Z_2 = 3 \left( \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$$

$$Z_2 = 3 \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

$$\text{عندما } k=2, \frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3} = \frac{\frac{\pi+8\pi}{2}}{3} = \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$$

$$Z_3 = 3 \left( \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$$

$$Z_3 = 3(0 - i) = -3i$$

2019 - د (1) تطبيقي / خارج

مثال 3

جد الجذور الاربعة للعدد  $(-16)$ .

$$(x, y) \\ -16 + 0i \Rightarrow (-16, 0)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-16)^2 + (0)^2} = \sqrt{256}$$

$$r = 16$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-16}{16} = -1$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{0}{16} = 0$$

$$Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left[ \cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right]$$

$$k=0, \frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{\pi + 0}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$Z_1 = (16)^{\frac{1}{4}} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$Z_1 = 2 \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) \Rightarrow Z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

$$\text{عندما } k=1, \frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{\pi + 2\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

$$Z_2 = 2 \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$

$$Z_2 = 2 \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) \Rightarrow Z_2 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

$$\text{عندما } k=2, \frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{\pi + 4\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

$$Z_3 = 2 \left( \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$$

$$Z_3 = 2 \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) \Rightarrow Z_3 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$$

$$\text{عندما } k=3, \frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{\pi + 6\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

$$Z_4 = 2 \left( \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$$

$$Z_4 = 2 \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) \Rightarrow Z_4 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$$



مثال 4

أوجد قيم  $(-64i)^{\frac{1}{6}}$  باستخدام مبرهنة دي موافر.

(x, y)

$$0 - 64i \Rightarrow (0, -64)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{0 + (-64)^2} \Rightarrow r = 64$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{0}{64} = 0 \quad \theta = \frac{3\pi}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{-64}{64} = -1$$

عندما

$$Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left[ \cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right]$$

$$\text{عندما } k=0, \frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{\frac{3\pi}{2} + 0}{6} = \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{4}$$

$$Z_1 = (64)^{\frac{1}{6}} \left[ \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right]$$

$$Z_1 = 2 \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i \right) \Rightarrow Z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

$$\text{عندما } k=1, \frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi}{6} = \frac{\frac{3\pi + 4\pi}{2}}{6} = \frac{7\pi}{12}$$

$$Z_2 = 2 \left( \cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right)$$

$$\text{عندما } k=2, \frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{\frac{3\pi}{2} + 4\pi}{6} = \frac{\frac{3\pi + 8\pi}{2}}{6} = \frac{11\pi}{12}$$

$$Z_3 = 2 \left( \cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right)$$

$$\text{عندما } k=3, \frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{\frac{3\pi}{2} + 6\pi}{6} = \frac{\frac{3\pi + 12\pi}{2}}{6} = \frac{5\pi}{4}$$

$$Z_4 = 2 \left( \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$$

## الرياضيات



مثال 5

أوجد الصيغة القطبية للمقدار  $(\sqrt{3} + i)^2$  ثم جد الجذور الخمسة له.

الربع الأول  $\sqrt{3} + i \rightarrow (x, y) = (\sqrt{3}, 1)$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4}$$

$$r = 2$$

زاوية الأسناد  $\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$   $\frac{\pi}{6}$

ربع أول  $\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{2}$   $\theta = \frac{\pi}{6}$

$$Z^n = r^n (\cos \theta + i \sin \theta)^n$$

$$Z^2 = 2^2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)^2$$

الصيغة القطبية  $Z^2 = 4 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$

الجذور الخمسة  $Z^{\frac{1}{5}}$

$$Z^{\frac{1}{5}} = 4^{\frac{1}{5}} \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)^{\frac{1}{5}}$$

$$Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left[ \cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right]$$

عندما  $k = 0, \frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{\frac{\pi}{3} + 0}{5} = \frac{\pi}{15}$

$$Z_1 = \sqrt[5]{4} \left( \cos \frac{\pi}{15} + i \sin \frac{\pi}{15} \right)$$

عندما  $k = 1 \quad \frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi}{5} = \frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi}{5} = \frac{7\pi}{15}$

$$Z_2 = \sqrt[5]{4} \left( \cos \frac{7\pi}{15} + i \sin \frac{7\pi}{15} \right)$$

عندما  $k = 2 \quad \frac{\frac{\pi}{3} + 4\pi}{5} = \frac{13\pi}{15}$

$$Z_3 = \sqrt[5]{4} \left( \cos \frac{13\pi}{15} + i \sin \frac{13\pi}{15} \right)$$

عندما  $k = 3 \quad \frac{\frac{\pi}{3} + 6\pi}{5} = \frac{19\pi}{15}$

$$Z_4 = \sqrt[5]{4} \left( \cos \frac{19\pi}{15} + i \sin \frac{19\pi}{15} \right)$$

عندما  $k = 4 \quad \frac{\frac{\pi}{3} + 8\pi}{5} = \frac{25\pi}{15} = \frac{5\pi}{3}$

$$Z_5 = \sqrt[5]{4} \left( \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)$$



$$Z_2 = (1)^{\frac{1}{3}} (\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$Z_2 = -1 + 0i$$

عندما  $k = 2$

$$\theta = \frac{\pi + 4\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{3}$$

$$Z_3 = (1)^{\frac{1}{3}} \left( \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)$$

$$Z_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

2017 - د (2) / تطبيقي

2019 - د (3) / أحيائي

\* يمكن ان يكون منطوق السؤال بصيغة مختلفة مثل:

باستخدام ديهوافر جد الجذور التكعيبية للعدد (-1)

$$x^3 = -1 \Rightarrow (-1 + 0i)^{\frac{1}{3}}$$

ثم نكمل الحل كما موضح اعلاه

مثال 6 حل المعادلة  $x^3 + 1 = 0$

باستخدام مبرهنة ديهوافر.

بالجذر التكعبي  $x^3 = -1$

$$x = \sqrt[3]{-1} \Rightarrow x = (-1 + 0i)^{\frac{1}{3}}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (0)^2} \Rightarrow r = 1$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta &= \frac{x}{r} = \frac{-1}{1} = -1 \\ \sin \theta &= \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0 \end{aligned} \right\} \theta = \pi$$

$$Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} [\cos \theta + i \sin \theta]^{\frac{1}{n}}$$

$$Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left[ \cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right]$$

$$\text{عندما } k = 0 \quad \frac{\pi + 0}{3} = \frac{\pi}{3}$$

$$Z_1 = (1)^{\frac{1}{3}} \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$Z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\text{عندما } k = 1 \quad \frac{\pi + 2\pi}{3} = \frac{3\pi}{3} = \pi$$



الأسئلة الوزارية حول موضوع المقياس والسعة والصيغة القطبية ومبرهنة ديموافر

سؤال 1

إذا كان  $Z = (-\sqrt{3}, 1)$  عددًا مركبًا أكتب الشكل الجبري له ثم جد مقياسه والقيمة الأساسية للسعة.

2002 - د (2)

$$Z = -\sqrt{3} + i \rightarrow (-\sqrt{3}, 1)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4}$$

$$r = 2 \quad ((\text{المقياس}))$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{2}$$

زاوية الأسناد  $\frac{\pi}{6}$  / الربع الثاني

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{2} \quad ((\text{السعة}))$$

سؤال 2

إذا كان  $(-1 + \sqrt{3}i)$  عددًا مركبًا جد مقياسه والقيمة الأساسية لسعته.

2008  
خارج القطر

$$Z = -1 + \sqrt{3}i \rightarrow (-1, \sqrt{3})$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} \Rightarrow r = 2$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-1}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

زاوية الأسناد  $\frac{\pi}{3}$  / الربع الثاني

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$$

سؤال 3

ضع المقدار  $\frac{7 + \sqrt{3}i}{1 + 2\sqrt{3}i}$  بالصيغة العادية للعدد المركب ثم جد مقياسه وسعته الأساسية.

2001 - د (1)

$$Z = \frac{7 + \sqrt{3}i}{1 + 2\sqrt{3}i} \cdot \frac{1 - 2\sqrt{3}i}{1 - 2\sqrt{3}i}$$

$$Z = \frac{7 - 14\sqrt{3}i + \sqrt{3}i + 6}{(1)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \frac{13 - 13\sqrt{3}i}{13}$$

$$Z = \frac{13}{13} - \frac{13\sqrt{3}i}{13} \Rightarrow Z = 1 - \sqrt{3}i$$

$$Z = (1, -\sqrt{3})$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4}$$

$$r = 2 \quad ((\text{المقياس}))$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

زاوية الأسناد  $\frac{\pi}{3}$  / الربع الرابع

$$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{3} \quad ((\text{السعة}))$$



سؤال 6 جد المقياس والقيمة الاساسية

للمسعة للعدد المركب  $(1 + \sqrt{3}i)^2$  (2008 - د (1)

انتبه! يجب وضع العدد المركب بصيغة  $a+bi$  والتخلص من التربيع.

$$Z = 1 + 2\sqrt{3}i - 3 \Rightarrow Z = -2 + 2\sqrt{3}i$$

$$Z = (-2, 2\sqrt{3})$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12}$$

$$r = 4 \text{ ((المقياس))}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

زاوية الأسناد  $\frac{\pi}{3}$  / الربع الثاني

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$$

سؤال 4 جد المقياس والقيمة الاساسية

للمسعة للعدد المركب  $\frac{2i}{1+i}$  (2007 - د (2)

$$Z = \frac{2i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} \Rightarrow Z = \frac{2i - 2i^2}{(1)^2 + (1)^2}$$

$$Z = \frac{2+2i}{2} \Rightarrow Z = 1+i \quad \begin{matrix} (1,1) \\ (x,y) \end{matrix}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} \Rightarrow r = \sqrt{2}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \left. \begin{array}{l} \text{زاوية الأسناد } \frac{\pi}{4} / \text{ الربع الأول} \\ \text{المسعة} \end{array} \right\} \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \left. \begin{array}{l} \text{زاوية الأسناد } \frac{\pi}{4} / \text{ الربع الأول} \\ \text{المسعة} \end{array} \right\} \theta = \frac{\pi}{4}$$

سؤال 5 جد المقياس والقيمة الاساسية

للمسعة للعدد المركب  $\frac{4}{1-\sqrt{3}i}$  (2008 - د (2)

$$Z = \frac{4}{1-\sqrt{3}i} \cdot \frac{1+\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}$$

$$Z = \frac{4(1+\sqrt{3}i)}{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \frac{4(1+\sqrt{3}i)}{4}$$

$$Z = 1 + \sqrt{3}i \rightarrow (1, \sqrt{3})$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} \Rightarrow r = 2$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2} \quad \left. \begin{array}{l} \text{زاوية الأسناد } \frac{\pi}{3} / \text{ الربع الأول} \\ \text{المسعة} \end{array} \right\} \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \left. \begin{array}{l} \text{زاوية الأسناد } \frac{\pi}{3} / \text{ الربع الأول} \\ \text{المسعة} \end{array} \right\} \theta = \frac{\pi}{3}$$

سؤال 7 إذا كان  $Z = 1 + \sqrt{3}i$  عددًا مركبًا

اكتب الشكل الديكارتي له ثم جد المقياس والمسعة.

$$Z = 1 + \sqrt{3}i \rightarrow (1, \sqrt{3}) \quad (2006 - د (2)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} \Rightarrow r = 2$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2} \quad \left. \begin{array}{l} \text{زاوية الأسناد } \frac{\pi}{3} / \text{ الربع الأول} \\ \text{المسعة} \end{array} \right\} \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \left. \begin{array}{l} \text{زاوية الأسناد } \frac{\pi}{3} / \text{ الربع الأول} \\ \text{المسعة} \end{array} \right\} \theta = \frac{\pi}{3}$$



سؤال 10 اكتب الصيغة القطبية للعدد

المركب  $3 - 3\sqrt{3}i$

(2015 - د 3)

$$Z = 3\sqrt{3}i \rightarrow Z = (3, -3\sqrt{3})$$

الربع الرابع (x, y)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(3)^2 + (-3\sqrt{3})^2} = \sqrt{9 + 27} = \sqrt{36}$$

$$r = 6$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{-3\sqrt{3}}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{3}$$

$$Z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$Z = 6\left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}\right)$$

سؤال 11 جد الصيغة القطبية للعدد

المركب  $5 - 5i$

(2014 - د 3)

$$Z = 5 - 5i \rightarrow (5, -5)$$

الربع الرابع (x, y)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(5)^2 + (-5)^2} = \sqrt{25 + 25} = \sqrt{50}$$

$$r = 5\sqrt{2}$$

سؤال 8 إذا كان عدداً مركباً مقياسه 3

وسعته  $\frac{\pi}{3}$  جد الشكل الديكارتي والجبري له.

$$r = 3, \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$x = r \cdot \cos \theta$$

$$x = 3 \cos \frac{\pi}{3} = 3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

$$y = r \cdot \sin \theta$$

$$y = 3 \sin \frac{\pi}{3} = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$Z = \left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right), Z = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

((الديكارتي))

((الجبري))

سؤال 9 إذا كان عدداً مركباً مقياسه (4)

وسعته  $\left(\frac{5\pi}{6}\right)$  جد الشكل الديكارتي والجبري له.

$$r = 4, \theta = \frac{5\pi}{6}$$

$$x = r \cdot \cos \theta$$

$$x = 4 \cdot \cos \frac{5\pi}{6} = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2\sqrt{3}$$

$$y = r \cdot \sin \theta$$

$$y = 4 \sin \frac{5\pi}{6} = 4\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

$$Z = (-2\sqrt{3}, 2), Z = -2\sqrt{3} + 2i$$

((الديكارتي))

((الجبري))



هل:

سؤال 13

$$\frac{(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)^5}{(\cos 4\theta + i \sin 4\theta)^2} - (\cos \theta + i \sin \theta)^2 = 0$$

$$\frac{[(\cos \theta + i \sin \theta)^2]^5}{[(\cos \theta + i \sin \theta)^4]^2} - (\cos \theta + i \sin \theta)^2$$

$$\frac{(\cos \theta + i \sin \theta)^{10}}{(\cos \theta + i \sin \theta)^8} - (\cos \theta + i \sin \theta)^2$$

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^2 - (\cos \theta + i \sin \theta)^2 = 0$$

2016 - د (2)  
خارج القطر

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{-5}{5\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta = \frac{7\pi}{4}$$

$$Z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$Z = 5\sqrt{2} \left( \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$$

زاوية الأسناد  
 $\frac{\pi}{4}$   
الربع الرابع

سؤال 12  
اكتب العدد  $Z = (1 + \sqrt{3}i)^2$  بالصيغة القطبية.

2016 - د (1)  
خارج القطر

$$Z = (1 + \sqrt{3}i)^2 = 1 + 2\sqrt{3}i - 3$$

$$= -2 + 2\sqrt{3}i \quad \begin{pmatrix} - & + \\ -2 & 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad (x, y)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16}$$

$$r = 4$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$$

$$Z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$Z = 4 \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$$

زاوية الأسناد  
 $\frac{\pi}{3}$   
الربع الثاني

لوقال باستخدام دي موافر لا نفتح

التربيع ونحل دي موافر  $n=2$

يا سارق الأرواح يا من لا يرى  
يا مقلتي يا مُعتني وجناني  
أنت الذي لولاك ما ذقت الهنا  
لا والذي بالروح قد أحياني



$$Z_1 = \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$Z_1 = \sqrt[3]{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)$$

$$\text{عندما } k=1 \quad \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3} = \frac{\frac{\pi+4\pi}{2}}{3} = \frac{5\pi}{6}$$

$$Z_2 = \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$$

$$Z_2 = \sqrt[3]{2} \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)$$

$$\text{عندما } k=2 \quad \frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3} = \frac{\frac{\pi+8\pi}{2}}{3} = \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$$

$$Z_3 = \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$$

$$Z_3 = \sqrt[3]{2} (0 - i)$$

ملاحظة: في السؤال (14) لم نفتح التربيع كما في سؤال (6) و (12) وذلك لان سؤال (14) باستخدام ديهوافر ولايجوز فتح الأسس في ديهوافر.

### تحذير هام جدا

أن مطبعة المغرب (ملازم دار المغرب) هي دار نشر قانونية مثبتة لدى وزارة الصناعة، وعليه نحذر من عملية التلاعب بطباعة مؤلفاتنا واستنساخها أو نشرها على الانترنت، فهناك عقوبات بحق هذا التجاوز والتعدي على طباعتنا وجهدنا وفق القانون العراقي المرقم ٢١ لسنة ١٩٥٧ والمعدل برقم ٨٠ في سنة ٢٠٠٤ وللمحكمة حق مصادرة المنتجات المخالفة والبضائع وعنوان المكتبة ووسائل التغليف والأوراق، وتذكر أن كل ما بين يديك هو جهد وإجتهاد شخصي من الاستاذ والمطبعة وفق الإتفاق المبرم، وعليه لا نخول شرعا وقانونا استنساخ أو نشر المزمرة أو أي جزء منها.

**سؤال 14** جد الجذور التكعيبية للعدد المركب  $(1+i)^2$  على وفق مبرهنة ديهوافر.

2015 - د (2)  
خارج القطر

$$Z = 1+i \rightarrow Z = (1,1) \quad \text{الربع الأول} \quad (x, y)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} \Rightarrow r = \sqrt{2}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

زاوية الأسناد

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

$$Z^n = r^n (\cos \theta + i \sin \theta)^n$$

$$Z^n = (\sqrt{2})^2 \left[ \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right]^2$$

$$Z^2 = 2 \left[ \cos \left( \frac{\pi}{4} \cdot 2 \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{4} \cdot 2 \right) \right]$$

$$Z^2 = 2 \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

$$(Z^2)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} \left[ \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right]^{\frac{1}{3}}$$

$$Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left[ \cos \frac{\theta+2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta+2k\pi}{n} \right]$$

$$(Z^2)^{\frac{1}{3}}$$

الجذور التكعيبية

$$\theta = \frac{\pi}{2}, r = 2, n = 3, k = 0, 1, 2$$

$$\text{عندما } k=0 \quad \frac{\frac{\pi}{2} + 0}{3} = \frac{\pi}{6}$$



سؤال 15

باستخدام دي موافر احسب

$$(\sqrt{3} + i)^{-\frac{3}{2}}$$

$$(\sqrt{3} + i)^{-\frac{3}{2}} = \left[ (\sqrt{3} + i)^{-3} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$(\sqrt{3} + i)^{-3} \quad \text{المبرهنة}$$

$$z = \sqrt{3} + i \Rightarrow (\sqrt{3}, 1)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3 + 1} = \sqrt{4}$$

$$r = 2$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta &= \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta &= \frac{y}{r} = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \frac{\pi}{6} = \text{زاوية الاسناد}$$

$$\theta = \text{زاوية الاسناد} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}, \quad n = -3$$

$$z^n = r^n [\cos \theta + i \sin \theta]^n$$

$$z^{-3} = (2)^{-3} \left[ \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right]^{-3}$$

$$z^{-3} = \frac{1}{8} \left[ \cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2} \right]$$

نرفع الناتج الى الأس  $\frac{1}{2}$  ونحل نتيجة

$$(z^{-3})^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{1}{8} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ \cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$r = \frac{1}{8}, \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad n = 2, \quad k = 0, 1$$

$$k = 0, \quad \frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$z_1 = \left( \frac{1}{8} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ \cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right]$$

$$z_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i \right)$$

$$z_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} i$$

$$k = 1$$

$$\frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{2} = \frac{5\pi}{4}$$

$$z_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( \cos \frac{5\pi}{4} - i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$$

اشارات الربع الثالث

$$z_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( \frac{-1}{\sqrt{2}} - \left( \frac{-1}{\sqrt{2}} \right) i \right) = \frac{-1}{4} + \frac{1}{4} i$$

الاشارة الاصلية

2017 - د (1) أحياني



سؤال 16

إذا كان  $Z = (\cos \theta + i \sin \theta)$  أثبت ان  $(1 + \bar{Z}) Z = 1 + Z$

2018 - د (2) / تطبيقي / خارج

$$\begin{aligned} \text{الطرف الأيسر} &= (1 + \bar{Z}) Z = [1 + (\cos \theta + i \sin \theta)] (\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= [1 + (\cos \theta - i \sin \theta)] (\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= [(\cos \theta + i \sin \theta) + (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta - i \sin \theta)] \\ &= (\cos \theta + i \sin \theta) + (\cos^2 \theta + i \sin^2 \theta) \\ &= \cos \theta + i \sin \theta + 1 = Z + 1 = \text{الطرف الأيمن} \end{aligned}$$

سؤال 17

إذا كان  $Z = \cos \theta + i \sin \theta$  أثبت ان  $\frac{Z^n}{1 + Z^{2n}} = \frac{1}{2 \cos n\theta}$

2019 - د (2) / احيائي

$$\begin{aligned} \text{الطرف الأيسر} &= \frac{Z^n}{1 + Z^{2n}} = \frac{1}{Z^{-n}(1 + Z^{2n})} \\ &= \frac{1}{Z^{-n} + Z^n} = \frac{1}{(\cos \theta + i \sin \theta)^{-n} + (\cos \theta + i \sin \theta)^n} \\ &= \frac{1}{\cos n\theta - i \sin n\theta + \cos n\theta + i \sin n\theta} \\ &= \frac{1}{2 \cos n\theta} = \text{الطرف الأيمن} \end{aligned}$$

أن مطبعة المغرب (ملازم دار المغرب) هي دار نشر قانونية مثبتة لدى وزارة الصناعة، وعليه نحذر من عملية التلاعب بطباعة مؤلفاتنا واستنساخها أو نشرها على الأنترنت، فهناك عقوبات بحق هذا التجاوز والتعدي على طباعتنا وجهدنا وفق القانون العراقي المرقم ٢١ لسنة ١٩٥٧ والمعدل برقم ٨٠ في سنة ٢٠٠٤ وللمحكمة حق مصادرة المنتجات المخالفة والبضائع وعنوان المكتبة ووسائل التغليف والأوراق، وتذكر أن كل ما بين يديك هو جهد وإجتهد شخصي من الاستاذ والمطبعة وفق الإتفاق المبرم، وعليه لا نخول شرعا وقانونا استنساخ أو نشر المزمرة أو أي جزء منها. لذا اقتضى التنويه والتحذير

تحذير هام جدا





الأستاذ  
حيدر وليد

07701780364

المُسْنَدُ فِي  
الرِّيَاضِيَّاتِ

الْقَطُوعُ الْمَخْرُوطِيَّةُ

2

2021

07702729223

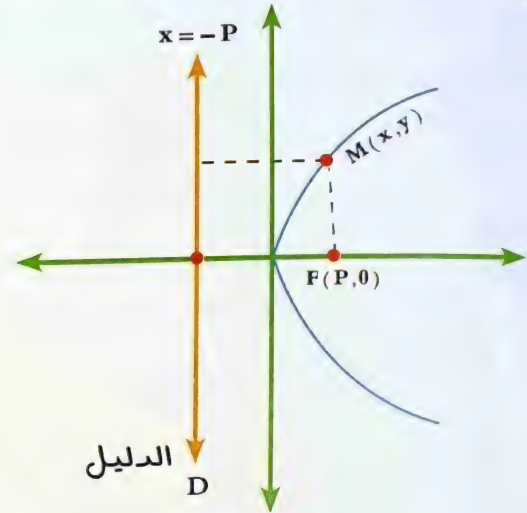


ملازم دار المغرب



## القطع المكافئ

هو مجموعة النقاط في المستوى والتي يكون بعد كل منها عن نقطة ثابتة  $F(P, 0)$  تسمى البؤرة حيث  $(P > 0)$  مساوياً دائماً لبعدها عن مستقيم معلوم  $(D)$  يسمى الدليل لا يحوي البؤرة.



البعد بين بؤرة ودليل القطع المكافئ  $= 2P$

اشارة الدليل عكس اشارة البؤرة

للقطع المكافئ أربع حالات:

معادلة القطع القياسية	معادلة الدليل	البؤرة	
$y^2 = 4Px$	$x = -P$	$F(P, 0)$	أولاً: فتحة القطع نحو اليمين
$y^2 = -4Px$	$x = +P$	$F(-P, 0)$	ثانياً: فتحة القطع نحو اليسار
$x^2 = 4Py$	$y = -P$	$F(0, P)$	ثالثاً: فتحة القطع نحو الأعلى
$x^2 = -4Py$	$y = +P$	$F(0, -P)$	رابعاً: فتحة القطع نحو الأسفل

### ملاحظة

حول معادلة القطع المكافئ القياسية:

- 1) تحتوي على متغيرين  $x, y$  أحدهما تربيع والآخر اس (1).
- 2) القطع على محور المتغير الذي لا يحتوي تربيع.
- 3) معامل متغير التربيع  $= 1$ . أنظر إلى معامل  $x^2$  و  $y^2$  في المعادلات كلها  $= 1$ .



إذا طلب البؤرة والدليل

مثال

جد البؤرة ومعادلة الدليل لكل من القطوع المكافئ الآتية:

5  $\frac{1}{5}x - y^2 = 0$

$\frac{1}{5}x = y^2 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{5}x$  نحو اليمين

$y^2 = 4Px$

$[4P = \frac{1}{5}] \div 4$

$P = \frac{1}{20}$

البؤرة  $F(\frac{1}{20}, 0)$  ،  $x = \frac{-1}{20}$  معادلة الدليل

1  $y^2 = -8x$

$y^2 = -4Px \Rightarrow [4P = 8] \div 4 \Rightarrow P =$

معادلة الدليل  $F(-2, 0)$  ،  $x = +2$

2  $x^2 = 4y$

$x^2 = 4Py \Rightarrow [4P = 4] \div 4 \Rightarrow P =$

معادلة الدليل  $F(0, 1)$  ،  $y = -1$

6  $3x^2 - 24y = 0$

$[3x^2 = 24y] \div 3 \Rightarrow x^2 = 8y$

$x^2 = 4Py$

$[4P = 8] \div 4 \Rightarrow P = 2$

معادلة الدليل  $F(0, 2)$  ،  $y = -2$

3  $2x + 16y^2 = 0$

$[16y^2 = -2x] \div 16$

$y^2 = \frac{-1}{8}x$

نحو اليسار

$y^2 = -4Px$

$[4P = \frac{1}{8}] \div 4 \Rightarrow P = \frac{1}{32}$

بؤرة الدليل  $F(\frac{-1}{32}, 0)$  ،  $x = \frac{1}{32}$

7  $y^2 = 4x$

$y^2 = 4Px \Rightarrow [4P = 4] \div 4 \Rightarrow P = 1$

$F(1, 0)$  ،  $x = -1$

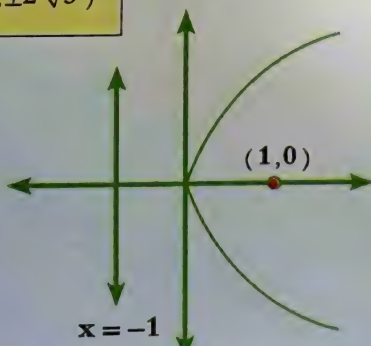
x	y	(x, y)
0	0	(0, 0)
1	$\pm 2$	(1, $\pm 2$ )
3	$\pm 2\sqrt{3}$	(3, $\pm 2\sqrt{3}$ )

إذا طلب الرسم:

نأخذ قيم x

ونعوضها بالمعادلة

ونجد y ثم نرسم.



4  $\frac{1}{2}y^2 = 8x$

ضرب المعادلة اعلاه في (2) لجعل معامل  $y^2$  يساوي احد حسب ملاحظات معادلة القطع المكافئ القياسية.

$y^2 = 16x$

$y^2 = 4Px \Rightarrow [4P = 16] \div 4$  يمين

$P = 4$

معادلة الدليل  $F(4, 0)$  ،  $x = -4$



## إيجاد معادلة القطع المكافئ

لايجاد معادلة القطع المكافئ هناك خمس حالات:

**أولاً:** إذا أعطى بؤرة القطع المكافئ F معناها أعطى P

1 نختار المعادلة المناسبة حسب البؤرة.

2 نعوض P مباشرة ← **انتبه!** نعوض P موجبة دائماً في المعادلة القياسية.

**مثال 4** جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل وبؤرته (0, -4).

$$P = 4 \rightarrow \text{أسفل} \rightarrow (0, -4)$$

$$x^2 = -4Py$$

$$x^2 = -4(4)y \Rightarrow x^2 = -16y$$

**مثال 1** جد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته (0, 5) ورأسه نقطة الاصل.

$$P = 5 \rightarrow \text{أعلى} \rightarrow F(0, 5)$$

$$x^2 = 4Py$$

$$x^2 = 4(5)y \Rightarrow x^2 = 20y$$

**مثال 5** جد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته (5, 0) ورأسه نقطة الاصل.

$$P = 5 \Rightarrow \text{يمين} \Rightarrow (5, 0)$$

$$y^2 = 4Px$$

$$y^2 = 4(5)x \Rightarrow y^2 = 20x$$

**مثال 2** جد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته (3, 0) ورأسه نقطة الاصل.

$$P = 3 \rightarrow \text{يمين} \rightarrow F(3, 0)$$

$$y^2 = 4Px$$

$$y^2 = 4(3)x \Rightarrow y^2 = 12x$$

**مثال 6** جد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته (-4, 0) ورأسه نقطة الاصل.

$$P = 4 (+) \rightarrow \text{يسار} \rightarrow (-4, 0)$$

$$y^2 = -4Px \Rightarrow y^2 = -16x$$

**مثال 3** جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل وبؤرته  $(0, \sqrt{2})$ .

$$P = \sqrt{2} \rightarrow \text{أعلى} \rightarrow F(0, \sqrt{2})$$

$$x^2 = 4Py$$

$$x^2 = 4(\sqrt{2})y \Rightarrow x^2 = 4\sqrt{2}y$$

**انياً:** إذا أعطى معادلة الدليل معناها أعطى (P) وتذكرنا إشارة الدليل عكس إشارة البؤرة.

مثلاً: إذا أعطى معادلة الدليل  $x = +3$  البؤرة سالبة لأن الدليل + ((القطع يسار X))

$y = -5$  البؤرة موجبة لأن الدليل - ((القطع أعلى Y))

$x = -\sqrt{2}$  البؤرة موجبة لأن الدليل - ((القطع يمين X))



جد معادلة القطع المكافئ الذي  
معادلة دليله  $4y + 3 = 0$  ورأسه  
نقطة الاصل.

$$4y + 3 = 0$$

$$[4y = -3] \div 4 \Rightarrow y = \frac{-3}{4}$$

البؤرة موجبة لأن الدليل سالب

$$P = \frac{3}{4}$$

$$x^2 = 4Py \Rightarrow x^2 = 4\left(\frac{3}{4}\right)y$$

$$x^2 = 3y$$

لا تنسى ان تعويض P يكون  
موجب دائماً في المعادلة  
القياسية

انتبه!

جد معادلة القطع المكافئ الذي  
معادلة دليله  $y = 7$  والرأس  
نقطة الاصل.

$$y = 7 \rightarrow P = 7$$

البؤرة سالبة لأن الدليل (+) أسفل (y)

$$x^2 = -4Py$$

$$x^2 = -4(7)y$$

$$x^2 = -28y$$

جد معادلة القطع المكافئ الذي  
رأسه نقطة الاصل ومعادلة دليله  
 $2x - 6 = 0$

$$2x - 6 = 0$$

$$[2x = 6] \div 2 \Rightarrow x = 3$$

لبؤرة سالبة لأن الدليل موجب  $P = 3$

$$y^2 = -4Px \Rightarrow y^2 = -4(3)x$$

$$y^2 = -12x$$

**ثالثاً:** إذا أعطى في السؤال نقطتين وقال ان القطع يمر بالنقطتين فإن خطوات لحل هي:

- 1 نعين النقاط في الارباع لتحديد فتحة القطع.
- 2 نختار المعادلة المناسبة حسب فتحة القطع.
- 3 نعوض واحدة من النقاط بـ  $x, y$  ونجد  $P$  ونعوض ( $P$ ) بالمعادلة القياسية.



مثال 10

جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين  $(2, -4)$  ،  $(2, 4)$  والرأس نقطة الاصل .



ربع أول  $\rightarrow (2, 4)$

ربع رابع  $\rightarrow (2, -4)$

تعيين النقاط في الارباع وتحديد القطع

اختيار المعادلة المناسبة حسب فتحة القطع  $y^2 = 4Px \rightarrow$

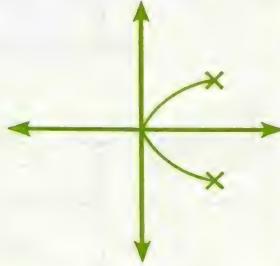
تعويض واحدة من النقاط  $(4)^2 = 4P(2)$

تعويض P في  $[16 = 8P] \div 8 \Rightarrow P = 2$  المعادلة القياسية

$$y^2 = 8x$$

مثال 11

جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين  $(2, 5)$  ،  $(2, -5)$  والرأس نقطة الاصل .



ربع أول  $\rightarrow (2, 5)$

ربع رابع  $\rightarrow (2, -5)$

القطع نحو اليمين .

$$y^2 = 4Px \quad (2, 5)$$

$$(5)^2 = 4(P)(2)$$

$$[25 = 8P] \div 8 \Rightarrow P = \frac{25}{8}$$

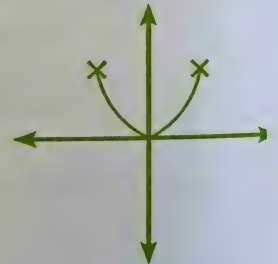
$$y^2 = 4\left(\frac{25}{8}\right)x \Rightarrow y^2 = \frac{25}{2}x$$

إستراحة شجرية:

رَمَاكَ الْحَاسِدُونَ بِكُلِّ غَيْبٍ  
وَعَيْبِكَ أَنْ حَسَنَكَ لَا يُحَافُ

مثال 12

جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر من  $(-1, 2)$  ،  $(\sqrt{3}, 6)$  ولأسه نقطة الاصل...اضافي .



ربع أول  $(\sqrt{3}, 6)$

ربع ثاني  $(-1, 2)$

القطع نحو الأعلى .

نختار أي نقطة  $x^2 = 4Py \quad (\sqrt{3}, 6)$

$$(\sqrt{3})^2 = 4P(6)$$

$$[3 = 24P] \div 24 \Rightarrow P = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$$

$$x^2 = 4\left(\frac{1}{8}\right)y \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}y$$

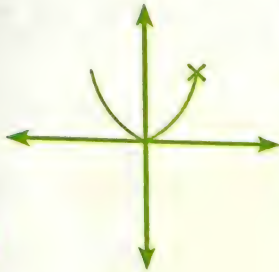


**رابعاً:** إذا أعطى نقطة واحدة فقط  $(x, y)$  وقال ان القطع يمر من النقطة  $(x, y)$  هناك حالتان:

**الأولى** ان يحدد موقع البؤرة (على محور السينات أو الصادات) وهنا يوجد معادلة واحدة للقطع ← تابع المثال.

**مثال 14** جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر من النقطة  $(\sqrt{2}, 1)$  وبؤرته على محور الصادات... اضافي.

ربع أول  $\rightarrow (\sqrt{2}, 1)$   
البؤرة صادات ← أعلى  
 $x^2 = 4Py$   $(\sqrt{2}, 1)$   
 $(\sqrt{2})^2 = 4P(1)$



$[2 = 4P] \div 4 \Rightarrow P = \frac{1}{2}$   
 $x^2 = 4\left(\frac{1}{2}\right)y \Rightarrow x^2 = 2y$

**مثال 13** جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر من النقطة  $(-1, 8)$  وبؤرته على محور السينات ورأسه نقطة الأصل... اضافي.

ربع ثاني  $\rightarrow (-1, 8)$   
البؤرة سينات ← يسار  
 $y^2 = -4Px$   $(-1, 8)$   
 $8^2 = -4P(-1)$



$64 = 4P \Rightarrow P = \frac{64}{4} \Rightarrow P = 16$   
 $y^2 = -4(16)x \Rightarrow y^2 = -64x$

**الثانية** لا يحدد موقع البؤرة لذلك هناك احتمالين  
بؤرة سينات ←  
بؤرة صادات ←

**مثال 15** جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر من النقطة  $(-2, -4)$  ورأسه نقطة الأصل.

بؤرة صادات / اسفل

$x^2 = -4Py$   
 $(-2)^2 = -4P(-4)$

$[4 = 16P] \div 16 \Rightarrow P = \frac{4}{16} \Rightarrow P = \frac{1}{4}$

$x^2 = -4\left(\frac{1}{4}\right)y \Rightarrow x^2 = -y$

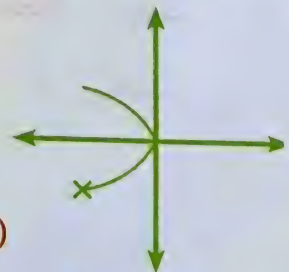


بؤرة سينات / يسار

$y^2 = -4Px$   
 $(-4)^2 = -4P(-2)$

$[16 = 8P] \div 8 \Rightarrow P = \frac{16}{8} \Rightarrow P = 2$

$y^2 = -8x$



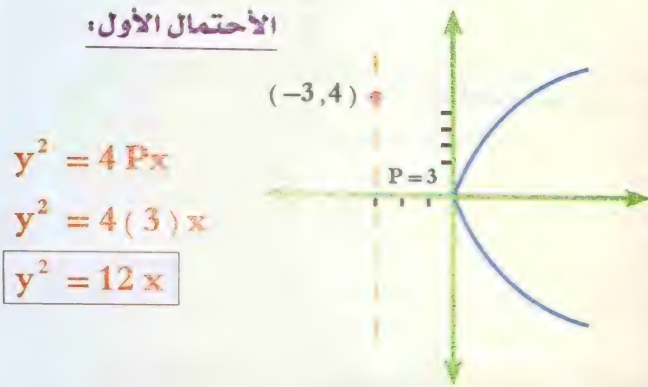


**خامساً:** إذا أعطى في السؤال نقطة  $(x, y)$  وقال ان دليل القطع يمر من هذه النقطة.

**انتبه!** لا نعوض هذه النقطة أبداً في معادلة القطع المكافئ القياسية لأن القطع لا يمر بها ولا تحقق معادلة القطع.

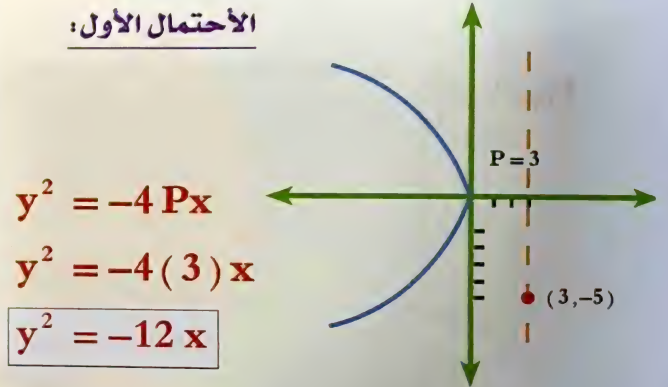
**مثال 17** إذا كان دليل القطع المكافئ يمر بالنقطة  $(-3, 4)$  والرأس نقطة الأصل جد معادلة القطع.

الاحتمال الأول:

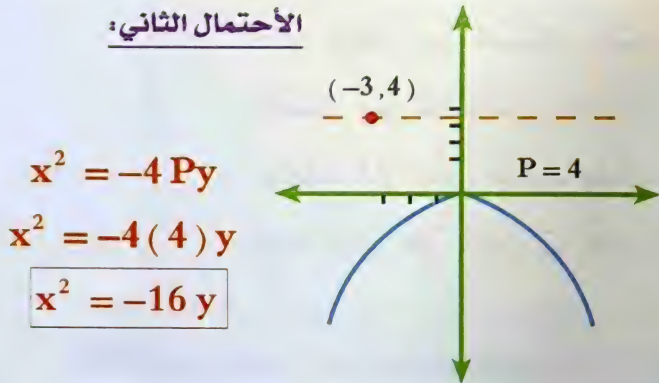


**مثال 16** جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر دليل القطع بالنقطة  $(3, -5)$ .

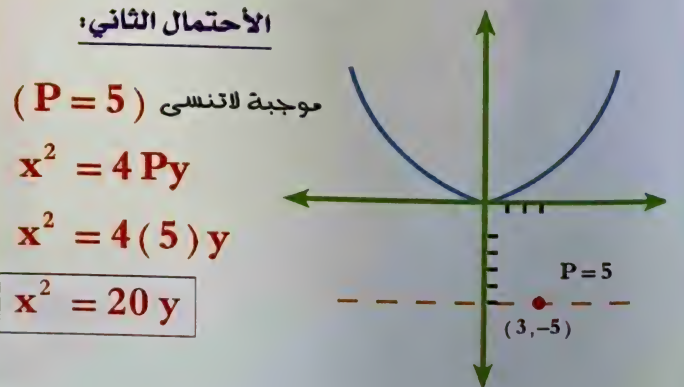
الاحتمال الأول:



الاحتمال الثاني:



الاحتمال الثاني:





قطع مكافئ معادلته  $Ax^2 + 8y = 0$  ويبر من النقطة  $(1, 2)$  جد قيمة  $(A)$  ثم جد البؤرة والدليل وارسم القطع.

$$Ax^2 + 8y = 0$$

$(x, y)$

$(1, 2)$

$$A(1)^2 + 8(2) = 0$$

$$A + 16 = 0 \Rightarrow A = -16$$

$$-16x^2 + 8y = 0 \Rightarrow [-16x^2 = -8y] \div -16$$

$$\frac{-16x^2}{-16} = \frac{-8y}{-16} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}y \text{ أعلى}$$

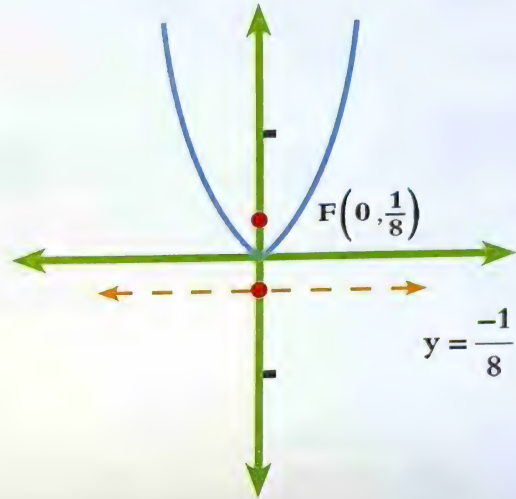
$$x^2 = 4Py$$

$$\left[ 4P = \frac{1}{2} \right] \div 4$$

$$P = \frac{1}{8}$$

البؤرة  $F(0, \frac{1}{8})$

معادلة الدليل  $y = -\frac{1}{8}$



وَأَحْبَهُ فِي اللَّهِ لَا أَدْرِي السَّبَبَ  
بِالرَّغْمِ أَنَّ الْحَبَّ أَمْرٌ مُكْتَسَبٌ  
لَكِنْ رَزَقْتُ مِنَ السَّمَاءِ بِحَبِّهِ  
فَأَجَبْتُ أَمْرَ اللَّهِ وَاشْتَدَّ الْعَجَبُ  
نَبْضَاتُنَا فِي الْحَبِّ لَيْسَتْ مِلْكُنَا  
فَإِذَا أَحَبَّ فَإِنَّ قَلْبِي مَا كَذَبَ



## إيجاد معادلة القطع المكافئ باستخدام التعريف

19

مثال

باستخدام التعريف جد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته  $(7, 0)$  والرأس نقطة الأصل.

حسب التعريف  $L_1 = L_2$

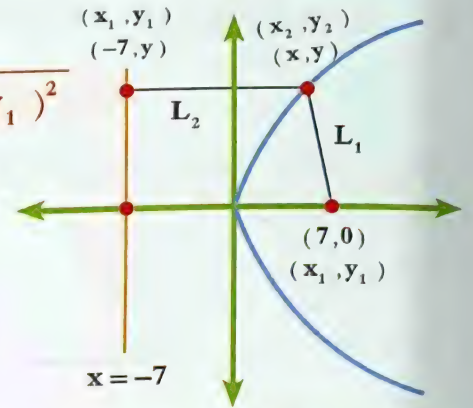
$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\sqrt{(x-7)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+7)^2 + (y-y)^2} \quad \text{بالتربيع}$$

$$x^2 - 14x + 49 + y^2 = x^2 + 14x + 49 + 0^2$$

مربع حدانية                      مربع حدانية

$$y^2 = 14x + 14x \Rightarrow y^2 = 28x$$



20

مثال

جد معادلة القطع المكافئ الذي معادلة دليبه  $y = \sqrt{3}$  باستخدام التعريف.

حسب التعريف  $L_1 = L_2$

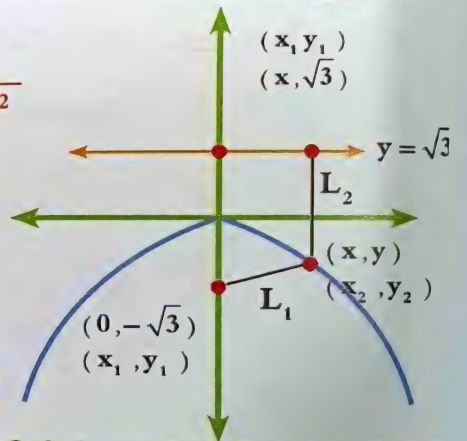
$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y+\sqrt{3})^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y-\sqrt{3})^2} \quad \text{بالتربيع}$$

$$x^2 + y^2 + 2\sqrt{3}y + 3 = 0^2 + y^2 - 2\sqrt{3}y + 3$$

$$x^2 = -2\sqrt{3}y - 2\sqrt{3}y \Rightarrow x^2 = -4\sqrt{3}y$$

2005 - تمهيدي



21

مثال

باستخدام التعريف جد معادلة قطع مكافئ بؤرته  $(\sqrt{3}, 0)$  والرأس نقطة الأصل.

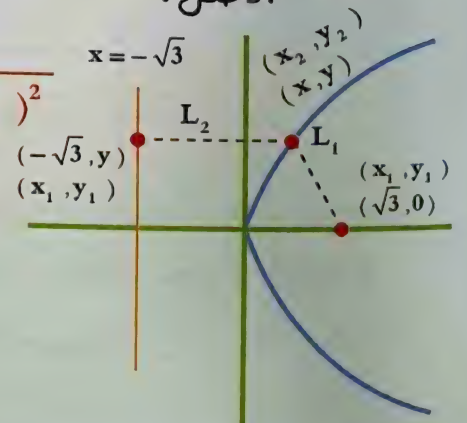
حسب التعريف  $L_1 = L_2$

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\sqrt{(x-\sqrt{3})^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+\sqrt{3})^2 + (y-y)^2} \quad \text{بالتربيع}$$

$$x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 + y^2 = x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 + 0$$

$$y^2 = 4\sqrt{3}x$$





الأسئلة الوزارية حول موضوع القطع المكافئ

**سؤال 3** قطع مكافئ معادلته  $\frac{1}{4}y^2 = hx$  دليله يمر بالنقطة  $(-6, 3)$  جد قيمة  $h$ .

2018 - د (3)

2008  
تمهيدي

$$\left[\frac{1}{4}y^2 = hx\right] \cdot 4$$

$$y^2 = 4hx$$

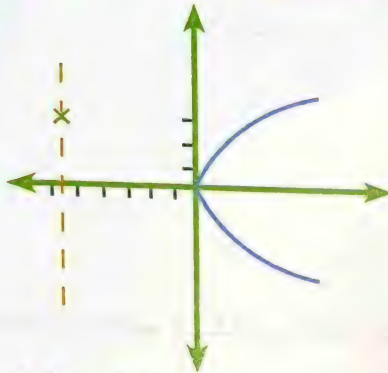
$$P = 6$$

$$y^2 = 4(6)x$$

$$y^2 = 24x$$

$$y^2 = 4hx \Rightarrow 4h = 24$$

$$h = 6$$



ملاحظة

عرفنا ان القطع على محور السينات لأن المعادلة بدلالة  $(y^2)$ . ولا يمكن تعويض النقطة  $(-6, 3)$  لأن الذي يمر بها الدليل وليس القطع.

استراحة شهرية:

فيا ليت الذي بيني وبينك باب يطرُق  
ويا ليت أطراف الأرض تطوئ فنلتقي

**سؤال 1** جد معادلة القطع مكافئ ذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطتين  $(-3, 6)$  ,  $(3, 6)$  ثم جد معادلة دليله.

2000 - د (1)

ربح أول  $(3, 6) \rightarrow$

ربح رابع  $(-3, 6) \rightarrow$

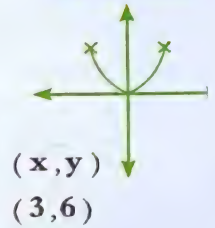
$$x^2 = 4Py \quad ((\text{نحو الأعلى}))$$

$$(3)^2 = 4P(6)$$

$$9 = 24P \Rightarrow P = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$

$$x^2 = 4\left(\frac{3}{8}\right)y \Rightarrow x^2 = \frac{3}{2}y$$

$$y = -P \Rightarrow y = -\frac{3}{8} \quad \text{معادلة الدليل}$$



**سؤال 2** جد معادلة القطع المكافئ ذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطتين  $(1, 3)$  ,  $(1, -3)$  ثم جد معادلة دليله.

2000 - د (2)

$$y^2 = 9x$$

/ الجواب

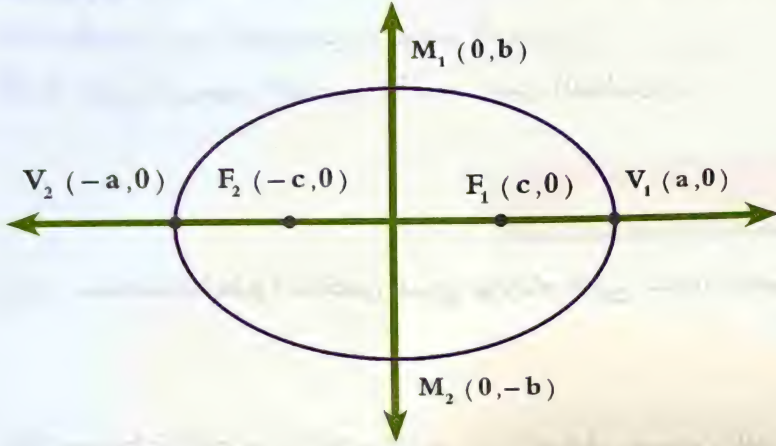
$$x = \frac{-9}{4} \quad \text{معادلة الدليل}$$



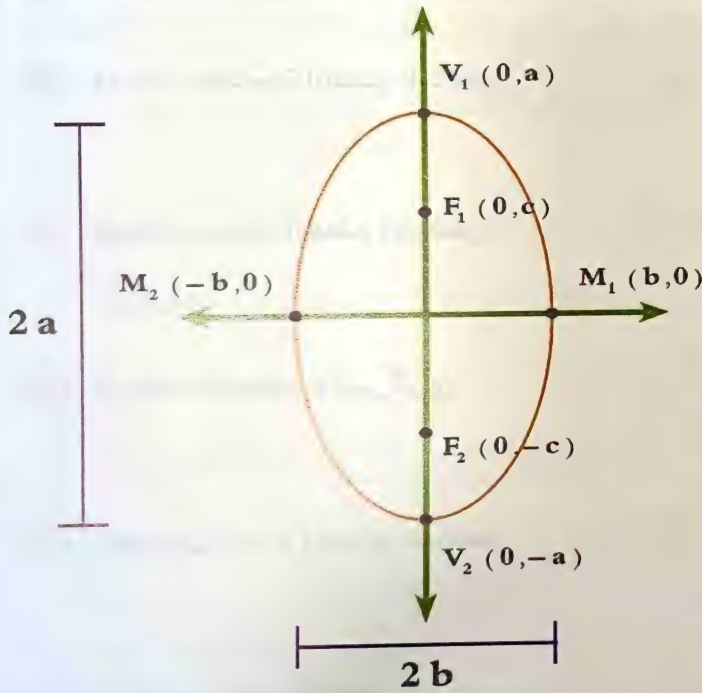
## القطع الناقص Ellipse

**تعريف:** هو مجموعة النقط على المستوى التي يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتين (البؤرتان) عدد ثابت.

المصطلحات والرموز:



((قطع ناقص بؤرتاه تنتهيات  
لبحور السينات))

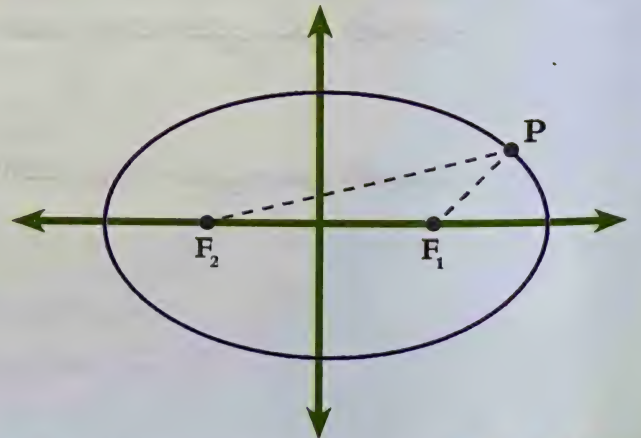


((قطع ناقص بؤرتاه تنتهيات  
لبحور الصادات))

$V_1, V_2 \leftarrow$  الرأسان  
 $F_1, F_2 \leftarrow$  البؤرتان  
 $M_1, M_2 \leftarrow$  القطبان

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

$PF_1 + PF_2$  / مجموع بعدي نقطة عن بؤرتيه





### مصطلحات

$2a$  = طول المحور الكبير ((البعد بين الرأسين)) ... ((العدد الثابت)) ... ((مجموع بعدي نقطة عن بؤرتيه))  
 $2c$  = البعد بين البؤرتين ((البعد البؤري))  
 $2b$  = طول المحور الصغير ((البعد بين القطبين))

### قوانين

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

1 معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه على محور السينات

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

2 معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه على محور الصادات

$$A = a b \pi$$

3 لإيجاد مساحة القطع الناقص

$$P = 2 \pi \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

4 لإيجاد محيط القطع الناقص

$$e < 1$$

$$e = \frac{c}{a}$$

5 لإيجاد الاختلاف المركزي أصغر من (1)

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} \leftarrow$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

6 القانون العام للقطع الناقص

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \leftarrow$$

\* معادلة المحور الكبير  $x = 0$   
 معادلة المحور الصغير  $y = 0$   
 إذا كان القطع بؤرتاه على محور الصادات.  
 \* معادلة المحور الكبير  $y = 0$   
 معادلة المحور الصغير  $x = 0$   
 إذا كان القطع بؤرتاه على محور السينات.

قيمة  $a$  أكبر من قيمة  $b$  وكذلك أكبر من قيمة  $c$   
 الاختلاف المركزي في القطع الناقص أصغر من (1)

إنتبه!



ملاحظات حول القطع الناقص

أولاً عندما يعطي

- إحداثي البؤرة يعني أعطى c
- إحداثي الرأس يعني أعطى a
- إحداثي القطب يعني أعطى b

ثانياً إذا أعطى :

- 1 طول المحور الكبير / مثلاً  $(12) \leftarrow 2a = 12$  ونجد a
- 2 طول المحور الصغير / مثلاً  $(16) \leftarrow 2b = 16$  ونجد b
- 3 البعد بين البؤرتين / مثلاً  $(8) \leftarrow 2c = 8$  ونجد c

ثالثاً إذا أعطى المساحة أو المحيط أو الاختلاف المركزي فهذا يجعلك تفكر بهذه القوانين؛ ذلك لايجاد مجهول إذا السؤال مباشر أو لايجاد علاقة من هذه القوانين تساعد في الحل.

رابعاً العلاقة بين القطعين المكافئ والناقص: عندما يكون السؤال يحوي قطع مكافئ وناقص يجب ترجمة الكلام وتحويله الى معادلة رياضية كما موضح في الامثلة التوضيحية أدناه:

جد معادلة القطع الناقص الذي إحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ... الخ.

$$P = c$$

مكافئ ناقص

جد معادلة القطع الناقص الذي احد راسيه هو بؤرة القطع المكافئ... الخ.

$$P = a$$

مكافئ ناقص

جد معادلة القطع الناقص الذي إحدى بؤرتيه تنطبق على بؤرة القطع المكافئ... الخ.

$$P = c$$

مكافئ ناقص



**خامسا** تحويل العبارات الى علاقات رياضية (معادلات):

- 1 مجموع طولي محوريه  $\leftarrow 2a + 2b$
- 2 مجموع مربعي طولي محوريه  $\leftarrow (2a)^2 + (2b)^2$
- 3 الفرق بين طولي محوريه  $\leftarrow$  إذا كان الفرق (+)  $2a - 2b$   
إذا كان الفرق (-)  $2b - 2a$

**سادسا** إذا أعطى في السؤال نقطة  $(x, y)$  يمر بها المنحني أو تنتمي الى

المنحني نستفيد من معادلة القطع القياسية  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  أو  $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$  حيث يتم

تعويض النقطة في المعادلة القياسية ولكن بشرط لا تحوي النقطة احدائي صفر.

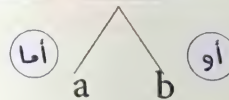
**سابعا** عبارات (يمر - يقطع - يمس):

- 1 إذا ذكر عبارة يمر بنقطة  $(x, 0)$  أو  $(0, y)$  شروط ان يكون اما  $x = 0$  أو  $y = 0$  في النقطة. فهذا يعني اما  $(a)$  أو  $(b)$  سوف يمثل اما  $(a)$  أو  $(b)$

- 2 كل يمس سوف يمثل اما  $(a)$  أو  $(b)$

\* جد معادلة القطع الناقص الذي يمس دليل القطع المكافئ... الخ.

$\leftarrow$  سوف يمثل اما  $(a)$  أو  $(b)$  **P**



أن مطبعة المغرب (ملازم دار المغرب) هي دار نشر قانونية مثبتة لدى وزارة الصناعة، وعليه نحذر من عملية التلاعب بطباعة مؤلفاتنا واستنساخها أو نشرها على الانترنت، فهناك عقوبات بحق هذا التجاوز والتعدي على طباعتنا وجهدنا وفق القانون العراقي المرقم ٢١ لسنة ١٩٥٧ والمعدل برقم ٨٠ في سنة ٢٠٠٤ وللمحكمة حق مصادرة المنتجات المخالفة والبضائع وعنوان المكتبة ووسائل التغليف والأوراق، وتذكر أن كل ما بين يديك هو جهد وإجتهاد شخصي من الاستاذ والمطبعة وفق الإتفاق المبرم، وعليه لا نخول شرعاً وقانوناً استنساخ أو نشر الملزمة أو أي جزء منها. لذا اقتضى التنويه والتحذير

تحذير هام جداً



سادساً إذا ذكر عبارة نقطة التقاطع مع محور السينات أو الصادات :

1 نقطة التقاطع مع محور السينات معناها نعوض بمعادلة المنحني أو معادلة المستقيم المعطاة في السؤال  $y=0$  .

أمثلة توضيحية

جد معادلة القطع الناقص الذي إحدى بؤرتيه نقطة تقاطع المستقيم  $2x - y = 8$  مع محور السينات... الخ

$$2x - y = 8 \quad y = 0 \rightarrow \text{نعوض}$$

$$2x - 0 = 8 \Rightarrow [2x = 8] \div 2$$

تصبح بؤرة للقطع الناقص كما ذكر في السؤال  $x = 4 \Rightarrow (4, 0) \leftarrow$

2 نقطة التقاطع مع محور الصادات معناها نعوض بمعادلة المنحني أو معادلة المستقيم المعطاة في السؤال  $x=0$  .

جد معادلة القطع الناقص الذي رأساه نقطتا تقاطع المنحني  $x^2 + y^2 - 3x = 16$  مع محور الصادات... الخ

$$x^2 + y^2 - 3x = 16, \quad x = 0$$

$$(0)^2 + y^2 - 3(0) = 16 \Rightarrow y^2 = 16 \Rightarrow y = \pm 4$$

$$x = 0$$

$(0, 4), (0, -4) \rightarrow$  يصبحان رأسان للقطع الناقص كما ذكر في السؤال

تاسعاً إذا ذكر عبارة يقطع فهي على نوعين :

النوع الأول يقطع محور السينات عند رقم  $x = \pm$  أو يقطع محور الصادات عند رقم  $y = \pm$

سوف يمثل إما (a) أو (b) ويؤخذ موجب

النوع الثاني إذا ذكر في السؤال ان القطع الناقص يقطع منحني ففي هذه الحالة نتبع ما يلي :

a نعوض الاحداثي المعطى في السؤال بمعادلة المنحني .

b بعد التعويض يصبح لدينا احداثي كامل من x و y .

c نعوض هذه النقطة بمعادلة القطع القياسية ونكمل الحل .



عاشراً ملاحظات أخرى

1 النسبة: وهي على نوعين:

النوع الأول

النسبة بين طولي محوريه

$$\frac{2a}{2b}$$

أما

$$\frac{2b}{2a}$$

أو

عندما النسبة أكبر من (1) أو رقم كبير / رقم صغير

عندما النسبة أصغر من (1) أو رقم صغير / رقم كبير

النوع الثاني

النسبة بين أطوال أخرى

مثلاً:

$$\frac{2a}{2c} = \frac{\text{البعد بين البؤرتين}}{\text{بسط (2a)}} \quad \frac{2a}{2c}$$

مثلاً:

$$\frac{2c}{2b} = \frac{\text{طول محوره الصغير}}{\text{بسط (2c)}} \quad \frac{2c}{2b}$$

بعد  
كلمة إلى  
يصبح مقام  
دائماً

يراجع السؤال الأول والثاني في الاسئلة الوزارية بما يخص فكرة النسبة

2 بعض المصطلحات الإضافية:

\* مجموع طول محوره الكبير ونصف طول محوره الصغير

$$2a + \frac{1}{2}(2b)$$

طول محوره الكبير  
مجموع  
نصف طول  
محوره الصغير

كل يزيد على الإشارة سالبة

\* طول محوره الكبير يزيد على طول محوره الصغير  $2a - 2b$

3 وجود معادلة القطع المكافئ في سؤال القطع الناقص يجعلك تفكر بإيجاد قيمة p من معادلة القطع المكافئ والعودة الى ملاحظات الربط الموضحة في النقطة (رابعاً).

4 إذا ذكر عبارة القطع المكافئ ولم تجد في السؤال معادلة القطع المكافئ فعليك أولاً التفكير في إيجاد قيمة p ومعادلة القطع المكافئ لأنها مفتاح الحل ولايجاد معادلة القطع المكافئ عليك ان تستند على الملاحظات التي سبق شرحها في القطع المكافئ.



الجزء الأول

إذا أعطى معادلة القطع الناقص وطلب معلومات القطع مثل (البؤرتان - الرأسان ... المساحة ... المحيط ... الخ).

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

صادات

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

سينات

1 يجب ان نضع المعادلة بالشكل القياسي

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

هنا لازم واحد

2 يجب ان يكون معامل  $x^2$  ومعامل  $y^2$  يساوي واحد

3 إذا كان هناك ثابت (رقم) بعد المساوي وكان عدد صحيح (ليس كسر) نقسم عليه المعادلة .

مثال توضيحي  $16x^2 + 9y^2 = 144$

$$[16x^2 + 9y^2 = 144] \div 144$$

$$\frac{16x^2}{144} + \frac{9y^2}{144} = \frac{144}{144} \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$

إذا كان بعد المساوي كسر نضرب المعادلة في مقلوب الكسر تابع المثال التوضيحي التالي:

$$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = \frac{2}{3}$$

نضرب في مقلوب  $\frac{2}{3}$  وهو  $\frac{3}{2}$

$$\frac{x^2}{12} \left( \frac{3}{2} \right) + \frac{y^2}{3} \left( \frac{3}{2} \right) = \frac{2}{3} \left( \frac{3}{2} \right) \Rightarrow \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$$

انتبه !

$$\frac{3x^2}{5} + \frac{2y^2}{7} = 1$$

ينزل تحت البقام

في حالة وجود عدد (معامل)  $x^2$  أو  $y^2$  يصبح مقام للبقام ← مثلاً

$$\frac{x^2}{\frac{5}{3}} + \frac{y^2}{\frac{7}{2}} = 1$$



**مثال 2** عين كل من البؤرتين والرأسين والقطبين والهرتز ثم جد طول ومعادلة كل من المحورين والاختلاف المركزي القطع  $x^2 + 2y^2 = 1$

$$\frac{x^2}{1} + \frac{2y^2}{1} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1$$

الأكبر  $a^2 = 1 \Rightarrow a = 1$  («سينات»)

الأصغر  $b^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$c = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore c = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$F_1(c, 0) \rightarrow F_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$F_2(-c, 0) \rightarrow F_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \quad \text{«البؤرتان»}$$

$$V_1(a, 0) \rightarrow V_1(1, 0)$$

$$V_2(-a, 0) \rightarrow V_2(-1, 0) \quad \text{«الرأسان»}$$

$$M_1(0, b) \rightarrow M_1\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$M_2(0, -b) \rightarrow M_2\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{«انقطبان»}$$

طول المحور الكبير  $2 = 2(1) = 2a$  وحدة

طول المحور الصغير  $\sqrt{2} = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2b$  وحدة

معادلة المحور الكبير  $y = 0 \leftarrow$

معادلة المحور الصغير  $x = 0 \leftarrow$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1 \quad \text{«أصغر»}$$

\* الهرتز  $O(0, 0)$  نقطة الأصل

**مثال 1** جد طول كل من المحورين وإحداثي البؤرتين والرأسين والاختلاف المركزي ومساحة ومحيط القطع الناقص.

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad \text{«المعادلة بالشكل القياسي»}$$

لا تحتاج ترتيب

العدد الأكبر هو  $a^2 = 25 \leftarrow 25$

العدد الأصغر هو  $b^2 = 16 \leftarrow 16$

$$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$$

$$b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$c = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9}$$

$$c = 3$$

طول المحور الكبير  $10 = 2(5) = 2a$  وحدة

طول المحور الصغير  $8 = 2(4) = 2b$  وحدة

$$F_1(c, 0) \rightarrow F_1(3, 0)$$

$$F_2(-c, 0) \rightarrow F_2(-3, 0) \quad \text{«البؤرتان»}$$

$$V_1(a, 0) \rightarrow V_1(5, 0)$$

$$V_2(-a, 0) \rightarrow V_2(-5, 0) \quad \text{«الرأسان»}$$

«أصغر»

$$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5} = 0.6 < 1$$

حدا  
ربعة  $A = a \cdot b\pi \Rightarrow A = (5 \times 4)\pi = 20\pi$

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} = 2\pi \sqrt{\frac{25 + 16}{2}}$$

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{41}{2}} \quad \text{وحدة}$$



4 مثال ناقش القطع الناقص  $4x^2 + 3y^2 = \frac{4}{3}$

$$4x^2 \left(\frac{3}{4}\right) + 3y^2 \left(\frac{3}{4}\right) = \frac{4}{3} \left(\frac{3}{4}\right)$$

$$\left(\frac{3x^2}{1}\right) + \left(\frac{9y^2}{4}\right) = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{3}} + \frac{y^2}{\frac{4}{9}} = 1$$

الأكبر  $\frac{4}{9} \rightarrow a^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow a = \frac{2}{3}$  (صادات)

الأصغر  $\frac{1}{3} \rightarrow b^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{4-3}{9}}$$

$$c = \sqrt{\frac{1}{9}} \Rightarrow c = \frac{1}{3}$$

$$F_1(0, c) \rightarrow F_1\left(0, \frac{1}{3}\right)$$

$$F_2(0, -c) \rightarrow F_2\left(0, -\frac{1}{3}\right)$$
 البؤرتان

$$V_1(0, a) \quad V_1\left(0, \frac{2}{3}\right)$$

$$V_2(0, -a) \quad V_2\left(0, -\frac{2}{3}\right)$$
 الرأسان

$$M_1(b, 0) \quad M_1\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$$

$$M_2(-b, 0) \quad M_2\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$$
 («القطبان»)

طول المحور الكبير  $\frac{4}{3} = 2\left(\frac{2}{3}\right) = 2a =$  وحدة

طول المحور الصغير  $\frac{2}{\sqrt{3}} = 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2b =$  وحدة

البعد بين البؤرتين  $\frac{2}{3} = 2\left(\frac{1}{3}\right) = 2c =$  وحدة

معادلة المحور الكبير  $x = 0$

معادلة المحور الصغير  $y = 0$

وحدة  $A = a \cdot b\pi = \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \pi = \frac{2}{3\sqrt{3}} \pi$  مربعة

وحدة  $P = 2\pi \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{4}{9} + \frac{1}{3}}{2}} = 2\pi \sqrt{\frac{7}{18}}$

$e = \frac{c}{a} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} \times \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}} = \frac{1}{2}$

3 مثال عين البؤرتان والرأسان والقطبان

والمرکز ثم جد طول ومعادلة المحورين والاختلاف

المرکزي للقطع  $9x^2 + 13y^2 = 117$

ملاحظة ثالثاً  $9x^2 + 13y^2 = 117 \rightarrow \div 117$

$$\frac{9x^2}{117} + \frac{13y^2}{117} = \frac{117}{117} \Rightarrow \frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{9} = 1$$

(سينات)  $a^2 = 13 \Rightarrow a = \sqrt{13}$

$b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{13 - 9}$

$c = \sqrt{4} \Rightarrow c = 2$

$F_1(c, 0) \rightarrow F_1(2, 0)$

$F_2(-c, 0) \rightarrow F_2(-2, 0)$  البؤرتان

$V_1(a, 0) \rightarrow V_1(\sqrt{13}, 0)$

$V_2(-a, 0) \rightarrow V_2(-\sqrt{13}, 0)$  الرأسان

$M_1(0, b) \rightarrow M_1(0, 3)$

$M_2(0, -b) \rightarrow M_2(0, -3)$  لقطبان

طول المحور الكبير  $2\sqrt{13} = 2(\sqrt{13}) = 2a =$  وحدة

طول المحور الصغير  $6 = 2(3) = 2b =$  وحدة

معادلة المحور الكبير  $y = 0$

معادلة المحور الصغير  $x = 0$

\* المرکز  $O(0, 0)$  نقطة الأصل

الاختلاف المرکزي  $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{\sqrt{13}}$



إيجاد معادلة القطع الناقص

الجزء الثاني

لإيجاد معادلة القطع الناقص يجب مراجعة الملاحظات السابقة وسوف نذكر كل ملاحظة مع الأمثلة الخاصة بها.

- إحداثي البؤرة يعني أعطى  $c$   
إحداثي الرأس يعني أعطى  $a$   
إحداثي القطب يعني أعطى  $b$

عندما يعطي

أولاً

ثانياً إذا أعطى :

- 1 طول المحور الكبير / مثلاً  $(12) \leftarrow 2a = 12$  ونجد  $a$
- 2 طول المحور الصغير / مثلاً  $(16) \leftarrow 2b = 16$  ونجد  $b$
- 3 البعد بين البؤرتين / مثلاً  $(8) \leftarrow 2c = 8$  ونجد  $c$

جد معادلة القطع الناقص الذي

مثال 2

بؤرتاه  $(5,0)$  ,  $(-5,0)$  وطول محوره الكبير  $= 12$  وحدة.

(السينات)  $c = 5 \rightarrow (c)$  (البؤرة)

$$[2a = 12] \div 2 \Rightarrow a = 6$$

نجد  $b$  من القانون العام

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

$$b = \sqrt{(6)^2 - (5)^2}$$

$$b = \sqrt{36 - 25}$$

$$b = \sqrt{11} \Rightarrow b^2 = 11$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{11} = 1$$

جد معادلة القطع الناقص الذي

مثال 1

بؤرتاه  $F_2(-3,0)$  ,  $F_1(3,0)$  ورأساه  $V_2(-5,0)$  ,  $V_1(5,0)$

(السينات)  $c = 3 \rightarrow (c)$  (البؤرة)

(السينات)  $a = 5 \rightarrow (a)$  (الرأس)

نجد  $b$  من القانون العام

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

$$b = \sqrt{(5)^2 - (3)^2}$$

$$b = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16}$$

$$b = 4$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$



مثال 3

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل والمسافة بين البؤرتين (8) وحدات ونصف طول محوره الصغير يساوي (3) وحدات .

$$2c = \text{المسافة بين البؤرتين}$$

$$[2c = 8] \div 2$$

$$c = 4$$

$$\frac{1}{2} (2b) = 3 \Rightarrow b = 3$$

نصف

محوره الصغير

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \text{نجد } a \text{ من القانون العام}$$

$$a^2 = 3^2 + 4^2$$

$$a^2 = 9 + 16 \Rightarrow a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$$

لم يحدد موقع البؤرة

الصادات

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

السينات

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

أو

تحذير هام جدا

أن مطبعة المغرب (ملازم دار المغرب) هي دار نشر قانونية مشبته لدى وزارة الصناعة، وعليه نحذر من عملية التلاعب بطباعة مؤلفاتنا واستنساخها أو نشرها على الانترنت، فهناك عقوبات بحق هذا التجاوز والتعدي على طباعتنا وجهدنا وفق القانون العراقي المرقم ٢١ لسنة ١٩٥٧ والمعدل برقم ٨٠ في سنة ٢٠٠٤ وللمحكمة حق مصادرة المنتجات المخالفة والبضائع وعنوان المكتبة ووسائل التغليف والأوراق، وتذكر أن كل ما بين يديك هو جهد واجتهاد شخصي من الاستاذ والمطبعة وفق الإتفاق المبرم، وعليه لا نخول شرعا وقانونا استنساخ أو نشر الملزمة أو أي جزء منها.



**ثالثاً** إذا أعطى المساحة أو المحيط أو الاختلاف المركزي فهذا يجعلك تفكر بهذه القوانين وذلك لاجداد مجهول إذا السؤال مباشر أو لاجداد علاقة من هذه القوانين تساعد في الحل .

**مثال 5** جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل ومحيطه يساوي  $10\pi$  وحدة وبؤرتاه تنتميان لمحور السينات ومركزه نقطة الأصل ومساحته منطقتة  $7\pi$  وحدة مربعة ومحيطه يساوي  $10\pi$  وحدة .

$$A = a \cdot b\pi \Rightarrow [7\pi = a \cdot b\pi] \div b$$

$$a = \frac{7}{b} \dots (1)$$

$$p = 2\pi \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \Rightarrow [10\pi = 2\pi \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}] \div 2\pi$$

$$5 = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \xrightarrow{\text{بالتربيع}} [25 = \frac{a^2+b^2}{2}] \times 2$$

$$50 = a^2 + b^2 \dots (2)$$

$$50 = \left(\frac{7}{b}\right)^2 + b^2 \Rightarrow [50 = \frac{49}{b^2} + b^2] \cdot b^2$$

$$50b^2 = 49 + b^4 \Rightarrow b^4 - 50b^2 + 49 = 0$$

$$(b^2 - 1)(b^2 - 49) = 0$$

(2011 - د 2)

$$b^2 - 1 = 0 \Rightarrow b = 1$$

(2015 - د 4) / رصافة

$$b^2 - 49 = 0 \Rightarrow b = 7$$

(2018 - د 1) / احياني

$$b=1 \text{ عندما } a = \frac{7}{b} = \frac{7}{1} \Rightarrow a = 7$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{1} = 1$$

$$b=7 \text{ عندما } a = \frac{7}{b} = \frac{7}{7} \Rightarrow a = 1$$

هذا الاحتمال يهمل لأن قيمة  $a$  هنا اصغر من قيمة  $b$  وهذا غير ممكن .

**مثال 4** جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل والاختلاف المركزي  $\left(\frac{1}{2}\right)$  وطول محوره الصغير (12) وحدة .

$$(2b) \Rightarrow [2b = 12] \div 2 \\ b = 6$$

$$e = \frac{c}{a}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{c}{a} \Rightarrow a = 2c \dots (1)$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$(2c)^2 = (6)^2 + c^2$$

$$4c^2 = 36 + c^2 \Rightarrow 4c^2 - c^2 = 36$$

$$[3c^2 = 36] \div 3 \Rightarrow c^2 = 12 \Rightarrow c = 2\sqrt{3}$$

$$a = 2c \Rightarrow a = 2(2\sqrt{3}) \Rightarrow a = 4\sqrt{3}$$

لم يتم تحديد موقع البؤرة ولها احتمالين :  
أولاً: على محور السينات

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{48} + \frac{y^2}{36} = 1$$

ثانياً: على محور الصادات

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{48} = 1$$



رابعاً

العلاقة بين القطعين المكافئ والناقص: عندما يكون السؤال يحوي قطع مكافئ وناقص يجب ترجمة الكلام وتحويله الى معادلة رياضية كما موضح في الامثلة التوضيحية أدناه:

جد معادلة القطع الناقص الذي إحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ... الخ.

$$P = c$$

مكافئ ناقص

جد معادلة القطع الناقص الذي احد راسيه هو بؤرة القطع المكافئ... الخ.

$$P = a$$

مكافئ ناقص

جد معادلة القطع الناقص الذي إحدى بؤرتيه تنطبق على بؤرة القطع المكافئ... الخ.

$$P = c$$

مكافئ ناقص

$$c = 3, \quad b = 5, \quad a = ?$$

من القانون العام نجد  $a$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = (5)^2 + (3)^2$$

$$a^2 = 25 + 9 \Rightarrow a^2 = 34$$

بؤرتا القطع الناقص على محور السينات  
لأن بؤرة القطع المكافئ على السينات.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{34} + \frac{y^2}{25} = 1$$

مثال 6 جد معادلة القطع الناقص الذي

مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ  $y^2 - 12x = 0$  وطول محوره الصغير يساوي (10) وحدات.

$$2b = 10 \Rightarrow b = 5$$

القطع المكافئ: دائماً نجد  $P$  من معادلة القطع المكافئ.

$$y^2 - 12x = 0 \Rightarrow y^2 = 12x$$

$$y^2 = 4Px$$

$$[4P = 12] \div 4 \Rightarrow P = 3$$

$$F(3, 0)$$

$$P = c$$

مكافئ ناقص



خامسا تحويل العبارات الى علاقات رياضية (معادلات):

- 1 مجموع طولي محوريه  $\leftarrow 2a + 2b$
- 2 مجموع مربعي طولي محوريه  $\leftarrow (2a)^2 + (2b)^2$
- 3 الفرق بين طولي محوريه  $\leftarrow$  إذا كان الفرق (+)  $2a - 2b$   
إذا كان الفرق (-)  $2b - 2a$

\* نستفد من معادلة المكافئ لنجد P

$$x^2 = 24y$$

$$x^2 = 4Py \Rightarrow [4P = 24] \div 4$$

$$P = 6 \Rightarrow F(0, 6)$$

أحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ

$$P = c \Rightarrow c = 6$$

$$[2a + 2b = 36] \div 2 \leftarrow \text{مجموع طولي محوريه}$$

$$a + b = 18 \Rightarrow b = 18 - a \dots\dots\dots (1)$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = (18 - a)^2 + (6)^2$$

مربع حدانية

$$a^2 = 324 - 36a + a^2 + 36 \Rightarrow [36a = 360] \div 36$$

$$a = 10$$

نعوض a في المعادلة (1)

$$b = 18 - a$$

$$b = 18 - 10 \Rightarrow b = 8$$

بؤرة الناقص على محور الصادات لذلك  
نستخدم معادلة الصادات.

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$$

جد معادلة القطع الناقص الذي

مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه على محور  
السينات والمسافة بينها (6) وحدات  
والفرق بين طولي محوريه (2).

$$[2c = 6] \div \Rightarrow c = 3$$

$$[2a - 2b = 2] \div 2 \Rightarrow a - b = 1$$

$$a = 1 + b \dots\dots\dots (1)$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$(1 + b)^2 = b^2 + 3^2$$

$$1 + 2b + b^2 = b^2 + 9 \Rightarrow 2b = 9 - 1$$

$$[2b = 8] \div 2$$

b = 4 (نعوض في معادلة رقم (1))

$$a = 1 + b$$

$$a = 1 + 4 \Rightarrow a = 5$$

(1) د - 2005

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

جد معادلة القطع الناقص الذي

مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه هي  
بؤرة القطع المكافئ ( $x^2 = 24y$ ) ومجموع  
طولي محوريه (36) وحدة.

مثال 8



سادسا

إذا أعطى في السؤال نقطة  $(x, y)$  يمر بها المنحني أو تنتهي الى المنحني نستفيد من معادلة القطع القياسية  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  أو  $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$  حيث يتم تعويض النقطة في المعادلة القياسية ولكن بشرط لا تحوي النقطة احداثي صفر.

بتعويض معادلة (2) في معادلة (1)

$$12b^2 + 3(b^2 + 4) = (b^2 + 4) \cdot b^2$$

$$12b^2 + 3b^2 + 12 = b^4 + 4b^2$$

$$15b^2 + 12 = b^4 + 4b^2$$

$$0 = b^4 + 4b^2 - 15b^2 - 12$$

$$b^4 - 11b^2 - 12 = 0$$

$$(b^2 + 1)(b^2 - 12) = 0$$

$$b^2 + 1 = 0 \text{ غير ممكن}$$

$$b^2 - 12 = 0 \Rightarrow b^2 = 12$$

نعوض في معادلة (2)

$$a^2 = b^2 + 4 \dots\dots(2)$$

$$a^2 = 12 + 4 \Rightarrow a^2 = 16$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$$

مثال 9 جد معادلة القطع الناقص الذي

مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته  $y^2 + 8x = 0$  علماً ان القطع الناقص يمر بالنقطة  $(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$ .

\* نستفيد من معادلة المكافئ لنجد P

$$y^2 = -8x$$

$$y^2 = -4Px \Rightarrow [4P = 8] \div 4 \Rightarrow P = 2$$

$$F(-2, 0)$$

$$\frac{\text{بؤرة القطع المكافئ}}{\text{مكافئ}} = \frac{\text{إحدى بؤرتيه}}{\text{ناقص}}$$

$$P$$

$$=$$

$$c$$

$$c = 2$$

أنظر الى النقطة  $(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$  نستفيد من معادلة القطع الناقص القياسية.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{(2\sqrt{3})^2}{a^2} + \frac{(\sqrt{3})^2}{b^2} = 1$$

$$\left[ \frac{12}{a^2} + \frac{3}{b^2} = 1 \right] \cdot a^2 \cdot b^2$$

$$12b^2 + 3a^2 = a^2 \cdot b^2 \dots\dots(1)$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = b^2 + 2^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + 4 \dots\dots(2)$$

2017 - د (3) / موصل

2017 - تمهيدي / تطبيقي

2017 - تمهيدي / احيائي

2014 - د (2)

2000 - د (1)

2018 - د (2) / احيائي / خارج

2018 - د (1) / تطبيقي / خارج



نحل معادلة (2) و (3) انيا

$$36b^2 + 64a^2 = 4a^2b^2$$

$$\pm 36b^2 \pm 4a^2 = \pm a^2b^2$$

$$[60a^2 = 3a^2b^2] \div a^2 \quad a^2 \neq 0$$

$$[60 = 3b^2] \div 3 \Rightarrow b^2 = 20$$

نعوض في معادلة (1)

$$9b^2 + 16a^2 = a^2b^2$$

$$9(20) + 16a^2 = a^2(20)$$

$$180 + 16a^2 = 20a^2$$

$$180 = 20a^2 - 16a^2 \Rightarrow [180 = 4a^2] \div 4$$

$$a^2 = 45$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{20} = 1$$

2016 - د (1) خارج

جد معادلة القطع الناقص الذي

مثال 10

مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه على محور السينات ويهر بالنقطتين (3,4) , (6,2)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{البؤرة على محور السينات})$$

$$\frac{(3)^2}{a^2} + \frac{(4)^2}{b^2} = 1 \quad \begin{matrix} (3,4) \\ (x,y) \end{matrix} \quad \text{نعوض}$$

$$\left[ \frac{9}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1 \right] \cdot a^2 \cdot b^2$$

$$9b^2 + 16a^2 = a^2b^2 \dots\dots(1)$$

$$\frac{(6)^2}{a^2} + \frac{(2)^2}{b^2} = 1 \quad \begin{matrix} (x,y) \\ (6,2) \end{matrix} \quad \text{نعوض}$$

$$\left[ \frac{36}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1 \right] \cdot a^2 \cdot b^2$$

$$36b^2 + 4a^2 = a^2b^2 \dots\dots(2)$$

نضرب المعادلة (1) في 4 لنساوي معامل  $b^2$  ونحل بالحدف (الطرح)

$$36b^2 + 64a^2 = 4a^2b^2 \dots\dots(3)$$

أن مطبعة المغرب (ملازم دار المغرب) هي دار نشر قانونية مثبتة لدى وزارة الصناعة، وعليه نحذر من عملية التلاعب بطباعة مؤلفاتنا واستنساخها أو نشرها على الانترنت، فهناك عقوبات بحق هذا التجاوز والتعدي على طباعتنا وجهدنا وفق القانون العراقي المرقم ٢١ لسنة ١٩٥٧ والمعدل برقم ٨٠ في سنة ٢٠٠٤ وللمحكمة حق مصادرة المنتجات المخالفة والبضائع وعنوان المكتبة ووسائل التغليف والأوراق، وتذكر أن كل ما بين يديك هو جهد واجتهاد شخصي من الاستاذ والمطبعة وفق الإتفاق المبرم، وعليه لا نخول شرعا وقانونا استنساخ أو نشر الملزمة أو أي جزء منها. لذا افتضى التنويه والتحذير

تحذير هام جدا



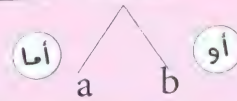
سابعاً عبارات (يهر - يمس) :

① إذا ذكر عبارة يهر بنقطة  $(x, 0)$  أو  $(0, y)$  شروط أن يكون إما  $x = 0$  أو  $y = 0$  في النقطة. فهذا يعني إما  $(a)$  أو  $(b)$  سوف يمثل إما  $(a)$  أو  $(b)$

② كل يمس سوف يمثل إما  $(a)$  أو  $(b)$

\* جد معادلة القطع الناقص الذي يمس دليل القطع المكافئ... الخ.

← P سوف يمثل إما  $(a)$  أو  $(b)$



ثامناً إذا ذكر عبارة نقطة التقاطع مع محور السينات أو الصادات :

نقطة التقاطع مع محور السينات  $y = 0$  ونقطة التقاطع مع محور الصادات  $x = 0$  حيث تعوض بمعادلة المنحني أو معادلة المستقيم المعطاة في السؤال .

كلمة يمس يعني إما  $a$  أو  $b$

وهنا  $(P = b)$  لأن البؤرة صادات والمكافئ سينات والذي يخالف البؤرة هو  $(b)$

$$b = 3$$

نجد  $a$  من القانون العام

$$a^2 = b^2 + c^2$$

2014 - د (2) / خارج

$$a^2 = 3^2 + 4^2$$

2017 - د (3) / تطبيقي موصل

$$a^2 = 9 + 16 \Rightarrow a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

مثال 11 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه نقطتا تقاطع المنحني  $x^2 + y^2 - 3x = 16$  مع محور الصادات ويمس دليل القطع المكافئ  $(y^2 = 12x)$ .

نقطة التقاطع مع محور الصادات  $x = 0$

$$x^2 + y^2 - 3x = 16$$

$$\text{بالجذر } (0)^2 + y^2 - 3(0) = 16 \Rightarrow y^2 = 16 \Rightarrow y = \pm 4$$

$$F_1 (0, 4) \quad F_2 (0, -4) \rightarrow c = 4 \text{ (صادات)}$$

استفد من معادلة القطع المكافئ لنجد  $P$

$$y^2 = 12x$$

$$y^2 = 4Px \Rightarrow [4P = 12] \div 4$$

$$P = 3 \text{ (سينات)}$$



تاسعا

إذا ذكر عبارة يقطع فهي على نوعين :

**النوع الأول** يقطع محور السينات عند  $x = \pm$  رقم أو يقطع محور الصادات عند  $y = \pm$  رقم

سوف يمثل إما (a) أو (b) ويؤخذ موجب

**النوع الثاني**

إذا ذكر في السؤال ان القطع الناقص يقطع منحنى ففي هذه الحالة نتبع ما يلي :

- a) نحوض الاحداثي المعطى في السؤال بمعادلة المنحنى .
- b) بعد التعويض يصبح لدينا احداثي كامل من x و y .
- c) نحوض هذه النقطة بمعادلة القطع القياسية ونكمل الحل .

تابعة للمثال (13)

12

مثال

جد المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه (0, 2) و (0, -2)

ويتقاطع مع محور السينات عند  $x = \pm 4$

(الصادات)  $c = 2 \rightarrow (c)$  البؤرة

2017 - د (1) / تطبيقي / موصل

**ملاحظة**

$x = 4$  تُعتبر (b) قطب لأن البؤرة على محور الصادات والذي يعاكس البؤرة هو

القطب لذلك (b = 4)

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = (4)^2 + (2)^2 \Rightarrow a^2 = 16 + 4 \Rightarrow a^2 = 20$$

$$\text{معادلة الصادات} \quad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{20} = 1$$

يا فاتنًا بالحبِّ قلبِي قد هَلَكَ  
هل أنتَ من حوّا وآطَمَ أم مَلَكْ  
عينِي إذا نظرتَ لحسنِكَ سَبَّحتَ  
سبحانَ من خلقَ الجمالَ وجَمَلَكْ



جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه على محور السينات ومركزه نقطة الأصل بطول محوره الكبير ضعف طول محوره الصغير ويقطع القطع المكافئ  $(y^2 + 8x = 0)$  عند النقطة التي احداثيتها السيني  $(-2)$ .

يقطع القطع عند النقطة  $x = -2$  نُعوضه قيمة  $x$  في معادلة القطع المكافئ

بالجذر  $y^2 + 8(-2) = 0 \Rightarrow y^2 = 16$

$y = \pm 4$

$(-2, 4)$  ,  $(-2, -4)$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

نعوض إحدى النقطتين ولتكن  $(-2, 4)$

$\frac{(-2)^2}{a^2} + \frac{(4)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{4}{(2b)^2} + \frac{16}{b^2} = 1$

ونعوض أيضاً  $a = 2b$

$\frac{4}{4b^2} + \frac{16}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{b^2} + \frac{16}{b^2} = 1$

$\frac{17}{b^2} = \frac{1}{1}$

$b^2 = 17 \Rightarrow b = \sqrt{17}$

$a = 2b \Rightarrow a = 2\sqrt{17} \Rightarrow a^2 = 68$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{68} + \frac{y^2}{17} = 1$

$[2a = 2(2b)] \div 2$

ضعف محوره الصغير = محوره الكبير

$a = 2b \dots\dots\dots(1)$

راجع السؤال (7) في الاسئلة الوزارية

تحذير هام جداً

أن مطبعة المغرب (ملازم دار المغرب) هي دار نشر قانونية مثبتة لدى وزارة الصناعة، وعليه نحذر من عملية التلاعب بطباعة مؤلفاتنا واستنساخها أو نشرها على الانترنت، فهناك عقوبات يحق هذا التجاوز والتعدي على طباعتنا وجهدنا وفق القانون العراقي المرقم ٢١ لسنة ١٩٥٧ والمعدل برقم ٨٠ في سنة ٢٠٠٤ وللمحكمة حق مصادرة المنتجات المخالفة والبضائع وعنوان المكتبة ووسائل التغليف والأوراق، وتذكر أن كل ما بين يديك هو جهد واجتهاد شخصي من الاستاذ والمطبعة وفق الإتفاق المبرم، وعليه لا نخول شرعاً وقانوناً استنساخ أو نشر المزمرة أو أي جزء منها.

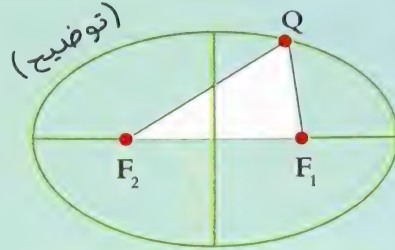


**ملاحظة ومثال** إذا أعطى محيط المثلث بين النقاط  $QF_1 F_2$  أي المحيط للمثلث

المكون من البؤرتين  $F_1, F_2$  ونقطة ثالثة على القطع يكون الحل كما يلي:

$$QF_1 F_2 = QF_1 + QF_2 + F_1 F_2$$

$$\text{محيط المثلث} = 2a + 2c$$



## الرياضيات

**مثال 14** جد معادلة القطع الناقص الذي

بؤرتيه  $F_1 (4, 0)$ ,  $F_2 (-4, 0)$  والنقطة

$Q$  تنتمي للقطع الناقص بحيث ان محيط

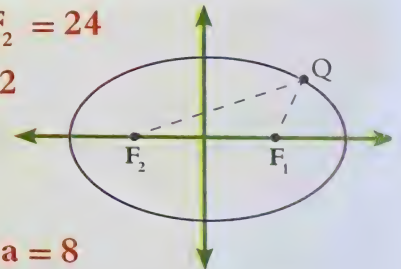
المثلث  $QF_1 F_2$  يساوي (24) وحدة.

$$QF_1 + QF_2 + F_1 F_2 = 24$$

$$[2a + 2c = 24] \div 2$$

$$a + c = 12$$

$$a + 4 = 12 \Rightarrow a = 8$$



نجد  $b$  من القانون العام

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

$$b = \sqrt{64 - 16}$$

$$b = \sqrt{48} \Rightarrow b^2 = 48$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$$

(1) د - 2014

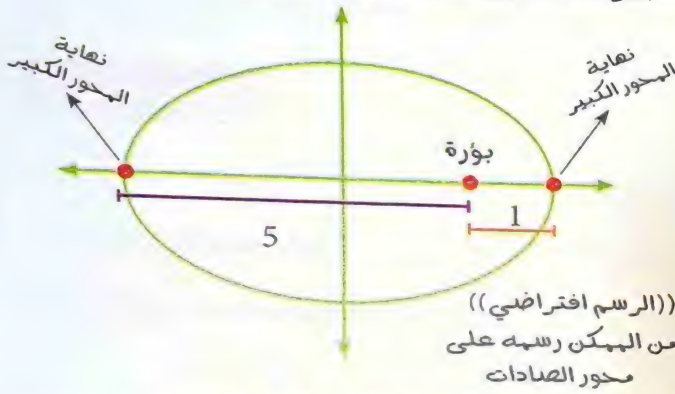
2016 - د (2) / خارج / المحيط = 30 بدل 24



**ملاحظة ومثال** عندما يعطي في السؤال بعدي احدى البؤرتين عن الرأسين بشكل عددين فأنا نستخدم المجموع والفرق.

مجموع البعدين  $2a =$   
حاصل طرح البعدين  $2c =$

**مثال 16** جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل واحدى بؤرتيه تبعد عن نهايتي محوره الكبير بالعددين 1,5 على الترتيب.



$$5 + 1 = 2a \Rightarrow [2a = 6] \div 2$$

$$a = 3$$

حاصل طرح البعدين  $5 - 1 = 2c \Rightarrow [2c = 4] \div 2$

$$c = 2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

$$b = \sqrt{9 - 4} \Rightarrow b = \sqrt{5}$$

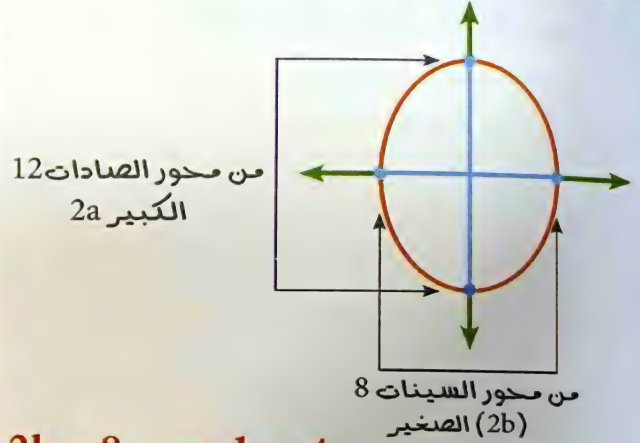
لم يحدد موقع البؤرة لذلك نأخذ احتمالين

السينات  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$

الصادات  $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$

**ملاحظة ومثال** إذا قال في السؤال ان القطع الناقص يقطع من محور (جزءاً) طوله (رقم) فأن هذا الجزء المقطوع إما  $2a$  أو  $2b$

**مثال 15** جد معادلة القطع الناقص الذي يقطع من محور السينات جزءاً طوله (8) وحدات ومن محور الصادات جزءاً طوله (12) وحدة. ثم جد المسافة بين البؤرتين والمساحة والمحيط.



$$2b = 8 \Rightarrow b = 4$$

$$2a = 12 \Rightarrow a = 6$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$c = \sqrt{36 - 16} = \sqrt{20} \Rightarrow c = 2\sqrt{5}$$

$$2c = 2(2\sqrt{5}) = 4\sqrt{5} \text{ unit}$$

$$A = ab\pi = 6(4)\pi = 24\pi \text{ unit}^2$$

$$p = 2\pi\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} = 2\pi\sqrt{\frac{36 + 16}{2}}$$

$$p = 2\sqrt{26} \pi \text{ unit}$$



ملاحظة ومثال

إذا أعطى في السؤال معادلة قطع ناقص تحتوي على ثابت مجهول  $h, k \in \mathbb{R}$

**الحالة الأولى:** إذا كانت المعادلة تحتوي مجهول واحد فقط نستفيد من معادلة القطع الهعطة في

السؤال لنجد  $a^2$  أو  $b^2$  ونستخدم القانون العام  $a^2 = b^2 + c^2$

17

مثال

لتكن  $kx^2 + 4y^2 = 36$  معادلة

قطع ناقص مركزه نقطة الأصل وإحدى  
بؤرتيه  $(\sqrt{3}, 0)$  جد قيمة  $k \in \mathbb{R}$ .

توضيح فقط

المعادلة  $kx^2 + 4y^2 = 36$  تحوي

مجهول واحد فقط لذلك نجعلها بالشكل

القياسي ثم نجد منها إما  $a^2$  أو  $b^2$

$$[kx^2 + 4y^2 = 36] \div 36$$

$$\frac{kx^2}{36} + \frac{4y^2}{36} = \frac{36}{36} \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{36}{k}} + \frac{y^2}{9} = 1$$

لأن البؤرة على محور السينات

$$\text{إذن } c = \sqrt{3}, b^2 = 9, \frac{36}{k} = a^2 \leftarrow$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$\frac{36}{k} = 9 + (\sqrt{3})^2$$

$$\frac{36}{k} = 9 + 3 \Rightarrow \frac{36}{k} = 12 \Rightarrow k = \frac{36}{12} \Rightarrow k = 3$$



**الحالة الثانية:** إذا كانت معادلة القطع الناقص المعطاة في السؤال تحوي مجهولين فلا نستفيد منها بشيء، وإنما نحل السؤال وكأن المطلوب هو معادلة القطع الناقص وبعدها نجعل معادلة المجهيل بالشكل القياسي وبالمقارنة مع المعادلة التي وجدناها سوف نستخرج المجهيل

18 مثال

قطع ناقص معادلته  $hx^2 + ky^2 = 36$  مركزه نقطة الأصل ومجموع مربعي طوليه محوريه يساوي (60) وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته  $y^2 = 4\sqrt{3}x$  .  $h, k \in \mathbb{R}$  جد قيمه

$$15 - b^2 = b^2 + 3$$

$$15 - 3 = b^2 + b^2 \Rightarrow [12 = 2b^2] \div 2$$

نعوض في معادلة (1)  $b^2 = 6$

$$a^2 = 15 - b^2$$

$$a^2 = 15 - 6 \Rightarrow a^2 = 9$$

الآن نجد معادلة القطع الناقص

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{6} = 1$$

بعد ذلك نجعل معادلة المجهيل بالشكل القياسي ثم نقارنها

$$[hx^2 + ky^2 = 36] \div 36 \Rightarrow \frac{hx^2}{36} + \frac{ky^2}{36} = \frac{36}{36}$$

$$\frac{x^2}{\frac{36}{h}} + \frac{y^2}{\frac{36}{k}} = 1 \xrightarrow{\text{بالمقارنة}} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{6} = 1$$

$$\frac{36}{h} = 9 \Rightarrow h = \frac{36}{9} \Rightarrow h = 4$$

$$\frac{36}{k} = 6 \Rightarrow k = \frac{36}{6} \Rightarrow k = 6$$

لأن معادلة القطع الناقص تحتوي مجهولين لا نستفيد منها لذلك من معلومات السؤال نجد معادلة القطع الناقص.

$$y^2 = 4\sqrt{3}x$$

$$y^2 = 4Px \Rightarrow [4P = 4\sqrt{3}] \div 4 \Rightarrow P = \sqrt{3}$$

$$F(\sqrt{3}, 0)$$

$$P = c \Rightarrow c = \sqrt{3}$$

مكافئ ناقص

$$\begin{array}{c} \text{مربعي} \\ (2a)^2 + (2b)^2 = 60 \\ \downarrow \\ \text{مجموع} \\ \text{طولي محوريه} \end{array}$$

$$[4a^2 + 4b^2 = 60] \div 4$$

$$a^2 + b^2 = 15 \Rightarrow a^2 = 15 - b^2 \dots\dots\dots (1)$$

$$\xrightarrow{\text{تعويض}} a^2 = b^2 + c^2$$

$$15 - b^2 = b^2 + (\sqrt{3})^2$$

(1) د - 1998

2017 د (2) / احيائي

2017 د (2) / تطبيقي / خارج







باستخدام التعريف جد معادلة القطع الناقص اذا علم:

-a بؤرتاه النقطتان  $(0, \pm 2)$  ورأساه  $(0, \pm 3)$  ومركزه نقطة الأصل.

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} + \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = 2a \text{ القانون}$$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(x-0)^2 + (y+2)^2} = 6 \text{ التعويض}$$

(تحويل الجذر للطرف الاخر)

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 4y + 4} = 6 - \sqrt{x^2 + y^2 + 4y + 4} \text{ وبتربيع الطرفين}$$

فتح التربيع داخل الجذر اعلاه

فتح التربيع داخل الجذر اعلاه

$$x^2 + y^2 - 4y + 4 = 36 - 12\sqrt{x^2 + y^2 + 4y + 4} + x^2 + y^2 + 4y + 4$$

$$[12\sqrt{x^2 + y^2 + 4y + 4} = 36 + 8y] \div 4$$

$$3\sqrt{x^2 + y^2 + 4y + 4} = 9 + 2y \text{ وبتربيع الطرفين}$$

$$9(x^2 + y^2 + 4y + 4) = 81 + 36y + 4y^2$$

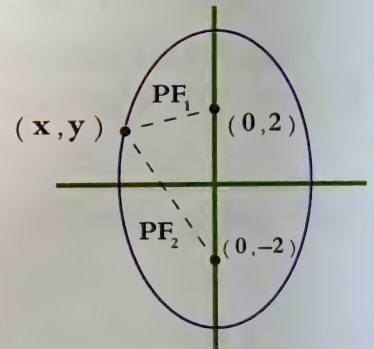
$$9x^2 + 9y^2 + 36y + 36 = 81 + 36y + 4y^2$$

$$9x^2 + 9y^2 - 4y^2 = 81 - 36$$

$$[9x^2 + 5y^2 = 45] \div 45$$

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$$

معادلة القطع الناقص



### تحذير هام جدا

أن مطبعة المغرب (ملازم دار الغرب) هي دار نشر قانونية مثبتة لدى وزارة الصناعة، وعليه نحذر من عملية التلاعب بطباعة مؤلفاتنا واستنساخها أو نشرها على الانترنت، فهناك عقوبات بحق هذا التجاوز والتعدي على طباعتنا وجهدنا وفق القانون العراقي المرقم ٢١ لسنة ١٩٥٧ والمعدل برقم ٨٠ في سنة ٢٠٠٤ وللمحكمة حق مصادرة المنتجات المخالفة والبضائع وعنوان المكتبة ووسائل التخفيف والأوراق، وتذكر أن كل ما بين يديك هو جهد واجتهاد شخصي من الاسستاذ والمطبعة وفق الإتفاق المبرم، وعليه لا نخول شرعا وقانونا استنساخ أو نشر الملزمة أو أي جزء منها.



b- باستخدام التعريف جد معادلة القطع الناقص اذا علمت ان المسافة بين بؤرتيه 6 وحدات والعدد الثابت = 10 والبؤرتان تقعان على محور السينات .:

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} + \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = 2a \quad \text{القانون}$$

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+3)^2 + (y-0)^2} = 10 \quad \text{التعويض}$$

التحويل (تحويل الجذر للطرف الاخر)

$$\sqrt{x^2 - 6x + 9 + y^2} = 10 - \sqrt{x^2 + 6x + 9 + y^2} \quad \text{وبتربيع الطرفين}$$

فتح التربيع داخل الجذر اعلاه

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 = 100 - 20\sqrt{x^2 + 6x + 9 + y^2} + x^2 + 6x + 9 + y^2$$

$$[20\sqrt{x^2 + 6x + 9 + y^2} = 100 + 12x] \div 4 \quad \text{وبتربيع الطرفين}$$

$$5\sqrt{x^2 + 6x + 9 + y^2} = 25 + 3x$$

$$25(x^2 + 6x + 9 + y^2) = 625 + 150x + 9x^2$$

$$25x^2 + 150x + 225 + 25y^2 = 625 + 150x + 9x^2$$

$$25x^2 + 25y^2 - 9x^2 = 625 - 225$$

$$[16x^2 + 25y^2 = 400] \div 400$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

معادلة القطع الناقص

توضيح

$$2c = 6 \Rightarrow c = 3$$

$$\text{العدد الثابت} \quad 2a = 10$$

$$\begin{array}{l} P(x, y) \begin{cases} \nearrow F_1(x_1, y_1) (3, 0) \\ \searrow F_2(x_1, y_1) (-3, 0) \end{cases} \end{array}$$



الاسئلة الوزارية الخاصة بالقطع الناقص والربط بين القطعين المكافئ والناقص

$$\left[ \frac{25}{16} b^2 = b^2 + 9 \right] \cdot 16$$

$$25 b^2 = 16 b^2 + 144$$

$$25 b^2 - 16 b^2 = 144$$

$$\left[ 9 b^2 = 144 \right] \div 9 \Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$$

$$a = \frac{5}{4} b \quad \text{نعوض في معادلة (1)}$$

$$a = \frac{5}{4} (4) \Rightarrow a = 5$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

**سؤال 2** جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه تنتهي لمحور الصادات ومساحته  $(32\pi)$  وحدة مساحة والنسبة بين طولي محوريه كنسبة  $\frac{1}{2}$ .

$$\frac{2b}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 2b \quad (1) \quad \text{2015 د (2)}$$

نعوض معادلة (1) هنا  $A = a \cdot b\pi$

$$32\pi = a \cdot b\pi$$

$$32 = (2b)(b) \Rightarrow \left[ 2b^2 = 32 \right] \div 2$$

$$b^2 = 16$$

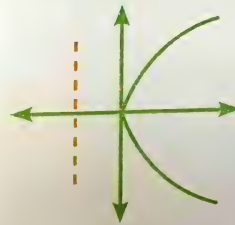
بالجذر

$$b = 4 \quad \text{نعوض معادلة (1)}$$

$$a = 2(b) = 2(4) \Rightarrow a = 8$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{64} = 1$$

**سؤال 1** النقطة  $\left(\frac{1}{3}, 2\right)$  تنتمي الى القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل وبؤرتاه تنتمي الى محور السينات والتي هي احدى بؤرتي القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل والنسبة بين طولي محوريه  $\left(\frac{5}{4}\right)$  جد معادلة القطعين المكافئ والناقص.



الفتحة نحو اليمين لأن النقطة في الربع الأول والبؤرة على محور السينات.

$$y^2 = 4Px$$

$$(2)^2 = 4P\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow 4 = \frac{4P}{3} \Rightarrow P = 3$$

$$y^2 = 4(3)x \Rightarrow y^2 = 12x$$

القطع الناقص:

$$\frac{P}{C} = \frac{C}{P} \quad \text{مكافئ ناقص}$$

1995 د (2)

2017 د (2) / احيائي / خارج

$$\frac{2a}{2b} = \frac{5}{4} \Rightarrow \left[ 4a = 5b \right] \div 4$$

$$a = \frac{5}{4} b \dots\dots (1)$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$\left(\frac{5}{4}b\right)^2 = b^2 + (3)^2$$



**سؤال 4** جد معادلة القطع الناقص الناقص الذي إحدى بؤرتيه هي بؤرته القطع المكافئ  $y^2 = -8x$  وطول محوره الكبير ثلاث امثال طول محوره الصغير.

$$y^2 = -8x$$

2010  
تمهيدي

$$y^2 = -4Px \Rightarrow [4P = 8] \div 4 \Rightarrow P = 2$$

$$F(-2, 0)$$

((سينات))

$$[2a = 3(2b)] \div 2$$

$$a = 3b \dots (1)$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$(3b)^2 = b^2 + 4 \Rightarrow 9b^2 = b^2 + 4$$

$$9b^2 - b^2 = 4 \Rightarrow [8b^2 = 4] \div 8$$

$$b^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$a = 3b \Rightarrow a = 3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$a = \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow a^2 = \frac{9}{2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{9}{2}} + \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1$$

**سؤال 3** لتكن  $y^2 + 12x = 0$ ,  $y^2 - 12x = 0$  معادلتين قطعيتين مكافئتين جد بؤرة كل منهما ومعادلة دليله ثم جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطعتين المكافئتين وطول محوره الصغير يساوي (10) وحدات طول.

2005 - د (2)

لقطع المكافئ:

$$y^2 - 12x = 0$$

$$y^2 = 12x$$

$$y^2 = 4Px \Rightarrow [4P = 12] \div 4 \Rightarrow P = 3$$

لبؤرة  $F(3, 0)$

معادلة الدليل  $x = -3$

$$y^2 + 12x = 0$$

$$y^2 = -12x$$

$$y^2 = 4Px \Rightarrow [4P = 12] \div 4 \Rightarrow P = 3$$

لبؤرة  $F(-3, 0)$

معادلة الدليل  $x = +3$

القطع الناقص:  $c =$  مكافئ  $P$  مكافئ

$$F_1(3, 0), F_2(-3, 0)$$

بؤرتاه هما

$$\therefore c = 3$$

$$[2b = 10] \div 2 \Rightarrow b = 5$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = 5^2 + 3^2 \Rightarrow a^2 = 25 + 9$$

$$a^2 = 34$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{34} + \frac{y^2}{25} = 1$$



سؤال 5

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل ومحوره على المحورين الاجداثيين ويهر من بؤرة القطع المكافئ  $y^2 - 16x = 0$  ومساحة منطقة القطع الناقص  $20\pi$  وحدة مساحة.

2010 د (1)

$$y^2 = 16x$$

$$y^2 = 4Px \Rightarrow [4P = 16] \div 4 \Rightarrow P = 4$$

البؤرة  $F(4, 0)$

القطع الناقص:

يهر من بؤرة المكافئ  $F(4, 0)$  أما  $a = 4$  أو  $b = 4$

$$A = ab\pi$$

$$20\pi = a \cdot b\pi \Rightarrow 20 = a \cdot b \dots\dots (1)$$

يوجد لدينا احتمالين:

الأول:  $a = 4$  نعوض بمعادلة (1)

$$[20 = 4b] \div 4 \Rightarrow b = 5$$

هذا الاحتمال يُهمل لأن فيه  $a$  اصغر من  $b$  وهذا لا يمكن في القطع الناقص.

الثاني:  $b = 4$  نعوض بمعادلة (1)

$$[20 = 4a] \div 4 \Rightarrow a = 5$$

هذا الاحتمال صحيح لأن  $a$  اكبر من  $b$ .

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$

ملاحظة

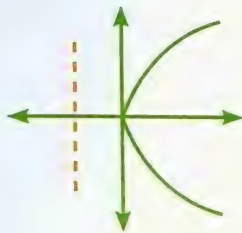
القطع على محور الصادات لأن البؤرة  $F(4, 0)$  التي مر بها القطع اصبحت  $b$  أي انها قطب وبها ان القطب سيني فالقطع صادي لأن البؤرة عكس القطب.

سؤال 6

قطع ناقص رأساه  $(\pm 5, 0)$  وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل والهار دليله بالنقطة  $(-3, 4)$  جد معادلة القطعين المكافئ والناقص.

2012

خارج القطر



القطع المكافئ:

القطعان على محور السينات.

$$y^2 = 4Px \quad P = 3$$

$$y^2 = 4(3)x \Rightarrow y^2 = 12x$$

معادلة القطع المكافئ

القطع الناقص:

بؤرة القطع المكافئ والتي هي  $F(3, 0)$  إحدى بؤرتي الناقص رأساه  $(\pm 5, 0)$

$$c = 3 \quad a = 5 \quad b = ?$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

$$b = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16}$$

$$b = 4$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$



**سؤال 8** جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وينطبق محوره على المحورين الاحداثيين ويقطع من محور السينات جزءاً طوله (8) وحدات ومساحة منطقتة  $24\pi$  وحدة مساحة.

(2012 - د 2)

الجزء المقطوع من محور السينات

$$2a = 8 \Rightarrow a = 4$$

$$2b = 8 \Rightarrow b = 4$$

$$A = a \cdot b\pi$$

$$24\pi = a \cdot b\pi \Rightarrow a \cdot b = 24$$

$$a = 4$$

$$[4b = 24] \div 4 \Rightarrow b = 6$$

$$b < a$$

أصغر

$$b = 4$$

$$[4a = 24] \div 4 \Rightarrow a = 6$$

$$a > b$$

أكبر

$$a = 6, b = 4$$

القطع على محور الصادات لأن الجزء المقطوع منه محور السينات أصبح يمثل (2b) أي محور القطب.

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$$

**سؤال 7** جد معادلة القطع الناقص الذي تقع بؤرتاه على محور السينات ومركزه نقطة الأصل والنسبة بين طولي محوريه 1 : 2 ويقطع القطع المكافئ  $y^2 = 8x$  عند  $x = 2$

2013

خارج القطر

$$y^2 = 8x$$

$$y^2 = 8(2) \Rightarrow y^2 = 16$$

بالجذر

$$y = \pm 4 \quad (2, 4), (2, -4)$$

$$\frac{2b}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 2b \dots \dots (1)$$

لأن لدينا (x, y) نستفيد من معادلة القطع الناقص القياسية.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2, 4) \text{ نعوض}$$

$$\frac{(2)^2}{(2b)^2} + \frac{(4)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{4}{4b^2} + \frac{16}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{b^2} + \frac{16}{b^2} = 1$$

$$\frac{17}{b^2} = \frac{1}{1} \Rightarrow b^2 = 17$$

$$b = \sqrt{17} \Rightarrow a = 2b$$

$$a = 2\sqrt{17} \Rightarrow a^2 = 68$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{68} + \frac{y^2}{17} = 1$$



أما  $a^2 + 64 = 0 \notin \mathbb{R}$

أو  $a^2 - 100 = 0 \Rightarrow a^2 = 100 \Rightarrow a = 10$

$b = \frac{80}{a} = \frac{80}{10} \Rightarrow b = 8$

لم يحدد بؤرة القطع

**إنتبه !**  
على الرغم ان القطع المكافئ  
على محور السينات إلا ان لم يحدد موقع  
البؤرة وانها اطوال فقط .

فقال  $2c = 2P$  وهذا لا يعني انها يقعان  
على نفس المحور .

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$$

### تحذير هام جدا

أن مطبعة المغرب (ملازم دار المغرب) هي دار نشر  
قانونية مثبتة لدى وزارة الصناعة، وعليه نحذر من  
عملية التلاعب بطباعة مؤلفاتنا واستنساخها أو  
نشرها على الانترنت، فهناك عقوبات بحق هذا  
التجاوز والتعدي على طباعتنا وجهدنا وفق القانون  
العراقي المرقم ٢١ لسنة ١٩٥٧ والمعدل برقم ٨٠ في سنة  
٢٠٠٤ وللمحكمة حق مصادرة المنتجات المخالفة  
والبضائع وعنوان المكتبة ووسائل التغليف والأوراق،  
وتذكر أن كل ما بين يديك هو جهد وإجتهاد شخصي  
من الاستاذ والمطبعة وفق الإتفاق المبرم، وعليه لا  
نحول شرعا وقانونا استنساخ أو نشر الملزمة أو أي  
جزء منها.

**سؤال 9**  
جد معادلة القطع الناقص الذي  
مركزه نقطة الأصل وبعده البؤري مساويا  
بعد بؤرة القطع المكافئ  $y^2 + 24x = 0$  عن  
ليله إذا علمت ان مساحة القطع الناقص  
تساوي  $80\pi \text{ cm}^2$  .

2016 - د (1)

2019 - د (1) / تطبيقي

$y^2 = -24x$

$y^2 = -4Px \Rightarrow [4P = 24] \div 4$   
 $P = 6$

بعد بين بؤرة القطع المكافئ ودليله  $2P$

$2c = 2P$   
بعد البؤري مساويا  
عد بؤرة القطع  
كافئ عن دليله

$\therefore c = P \Rightarrow c = 6$  (للقص)

$A = a \cdot b\pi$

$80\pi = a \cdot b\pi \Rightarrow b = \frac{80}{a} \dots\dots (1)$

$a^2 = b^2 + c^2$

$a^2 = \left(\frac{80}{a}\right)^2 + (6)^2$

$[a^2 = \frac{6400}{a^2} + 36] \cdot a^2$

$a^4 = 6400 + 36a^2$

$a^4 - 36a^2 - 6400 = 0$

$(a^2 + 64)(a^2 - 100) = 0$



سؤال 11 قطع ناقص معادلته  $4x^2 + 2y^2 = k$  والبعد بين بؤرتيه  $2\sqrt{3}$  وحدة طول جد قيمه  $k$ .

$$[4x^2 + 2y^2 = k] \div k \quad (2008 - د 1)$$

$$\frac{4x^2}{k} + \frac{2y^2}{k} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{k}{4}} + \frac{y^2}{\frac{k}{2}} = 1$$

$$[2c = 2\sqrt{3}] \div 2 \Rightarrow c = \sqrt{3}$$

$$\frac{k}{4} \text{ أكبر من } \frac{k}{2} \text{ ((كلها صغر البقام كبر الكسر))}$$

«القطع صادي» لأن الكبير  $\frac{k}{2}$  يقع على محور (y)

$$a^2 = \frac{k}{2}, \quad b^2 = \frac{k}{4}, \quad c = \sqrt{3}$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$\frac{k}{2} = \frac{k}{4} + (\sqrt{3})^2$$

$$[\frac{k}{2} = \frac{k}{4} + 3] \cdot 4$$

$$2k = k + 12$$

$$2k - k = 12 \Rightarrow k = 12$$

سؤال 10 إذا كان  $e + id = \frac{4+2i}{1-i}$  جد معادلة القطع الناقص الذي إحدى بؤرتيه  $(0, d)$  وطول محوره الكبير يساوي  $2\|e + di\|$

2014  
نازحين

2016  
نازحين

$$e + id = \frac{4+2i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i}$$

$$e + id = \frac{4+4i+2i-2}{(1)^1 + (1)^2} = \frac{2+6i}{2}$$

$$e + di = 1 + 3i \Rightarrow e = 1$$

$$d = 3$$

حدى بؤرتي القطع الناقص  $(0, d) = (0, 3)$

$$r = \|e + di\| = \sqrt{e^2 + d^2}$$

$$= \sqrt{(1)^2 + (3)^2} = \sqrt{10}$$

$$2a = 2\sqrt{10} \Rightarrow a = \sqrt{10} \Rightarrow a^2 = 10$$

$$c = 3, \quad a = \sqrt{10}, \quad b = ?$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

$$b = \sqrt{10 - 9} = \sqrt{1}$$

$$b = 1$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{10} = 1$$



سؤال 12

إذا كان  $ky^2 + 3x^2 = z$  معادلة قطع ناقص بؤرته تنتمي إلى محور السينات وبهر نقطة تقاطع المستقيم  $2x + y = \sqrt{3}$  مع المحور الصادي علماً أن مساحة القطع  $2\sqrt{3}\pi$  وحدة مساحة جد  $k, Z \in \mathbb{R}$ .

$2x + y = \sqrt{3}$   $x = 0$  ((نقطة التقاطع مع محور الصادات))

(2010 - د 2)

$2(0) + y = \sqrt{3}$

$y = \sqrt{3}$   $(0, \sqrt{3}) \rightarrow y$  هذه النقطة تمثل القطب لأنها على محور

$b = \sqrt{3}$  والبؤرة على محور X أي أن

$A = a \cdot b\pi \Rightarrow 2\sqrt{3}\pi = a(\sqrt{3})\pi \Rightarrow a = 2$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

$[ky^2 + 3x^2 = z] : z \Rightarrow \left(\frac{3x^2}{z}\right) + \left(\frac{ky^2}{z}\right) = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{z}{3}\right)} + \frac{y^2}{\left(\frac{z}{k}\right)} = 1$   
 $a^2 = \frac{z}{3}$   $b^2 = \frac{z}{k}$

$\frac{z}{3} = a^2 \Rightarrow \frac{z}{3} = 4 \Rightarrow z = 12$

$\frac{z}{k} = b^2 \Rightarrow \frac{12}{k} = 3 \Rightarrow k = \frac{12}{3} \Rightarrow k = 4$

أن مطبعة المغرب (ملازم دار المغرب) هي دار نشر قانونية مثبتة لدى وزارة الصناعة، وعليه نحذر من عملية التلاعب بطباعة مؤلفاتنا واستنساخها أو نشرها على الأنترنت، فهناك عقوبات بحق هذا التجاوز والتعدي على طباعتنا وجهدنا وفق القانون العراقي المرقم ٢١ لسنة ١٩٥٧ والمعدل برقم ٨٠ في سنة ٢٠٠٤ وللمحكمة حق مصادرة المنتجات المخالفة والبضائع وعنوان المكتبة ووسائل التغليف والأوراق، وتذكر أن كل ما بين يديك هو جهد وإجتهاد شخصي من الاستاذ والمطبعة وفق الاتفاق المبرم، وعليه لا نخول شرعاً وقانوناً استنساخ أو نشر الملزمة أو أي جزء منها. لذا اقتضى التنويه والتحذير

تحذير هام جداً



**ملاحظة:** إذا جاء سؤال عبارة عن نصف قطع ناقص وكانت معلوم المسافة بين

القاعدتين والارتفاع نتبع ما يأتي:

- 1- نقسم البعد بين القاعدتين على (2) ونجد الناتج
  - 2- إذا كان الارتفاع اصغر من ناتج القسمة (القطع سينات) وإذا كان الارتفاع أكبر من الناتج (القطع صادات).
  - 3- نستخدم المعادلة القياسية المناسبة حسب القطع ونعوض  $a, b$  ثم نجد المطلوب.
- انتبه الارتفاع عند نقطة معينة معناها ان المطلوب هو  $(y)$ .

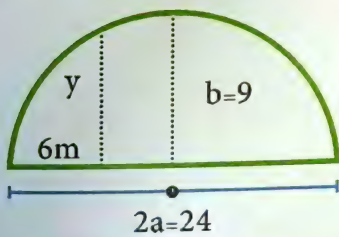
**سؤال 13** جسر على شكل نصف قطع ناقص المسافة بين نهايتي قاعدتيه (24m) وأعلى ارتفاع للجسر (9m) احسب ارتفاع الجسر عند النقطة التي تبعد 6m من بداية إحدى قاعدتيه

$$[ \text{المسافة بين القاعدتين} = 24 ] \div 2$$

الناتج  $\rightarrow 12$

الارتفاع  $\rightarrow 9$

الارتفاع اصغر من الناتج  $\leftarrow$  سينات



$$2a = 24 \Rightarrow a = 12$$

$$b = 9$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{81} = 1$$

$$x = 6m, y = ?$$

2014 - تمهيدي

نعوض  $x$  بالمعادلة الأخيرة ونجد  $(y)$

$$\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{81} = 1 \Rightarrow \frac{36}{144} + \frac{y^2}{81} = 1$$

$$\frac{1}{4} + \frac{y^2}{81} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{81} = 1 - \frac{1}{4}$$

$$\frac{y^2}{81} = \frac{3}{4} \Rightarrow y^2 = \frac{3 \cdot 81}{4}$$

$$y = \frac{9\sqrt{3}}{2} m$$



سؤال 14

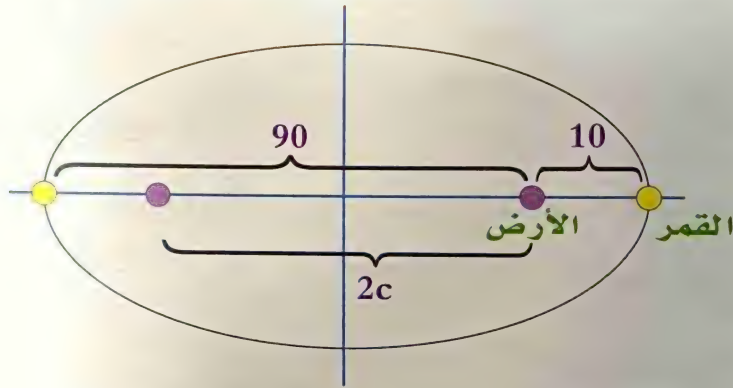
يدور القمر حول الأرض في مدار على شكل قطع ناقص سيني البؤرتين تقع الأرض في إحدى بؤرتيه فإذا كانت أطول مسافة بين الأرض والقمر 90km وأقصر مسافة بينها 10km جد الاختلاف المركزي للقطع

2016 - د (2) / خارج

$$90 + 10 = 100 = 2a \rightarrow a = 50$$

$$90 - 10 = 80 = 2c \rightarrow c = 40$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{40}{50} = \frac{4}{5} < 1 \quad (1) \text{ أصغر من } 1$$

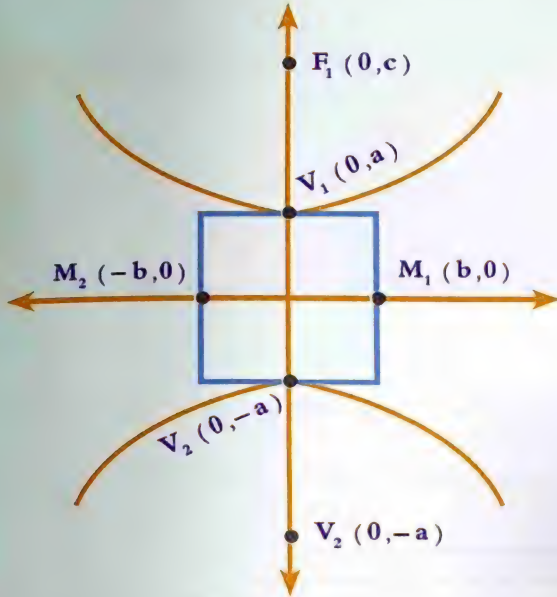


## الرياضيات



## القطع الزائد

**تعريف:** هو مجموعة من النقط في المستوى التي تكون القيمة المطلقة لفرق بعدي أي منها عن نقطتين ثابتين ((البؤرتان)) يساوي عدداً ثابتاً.



قطع زائد بؤرتاه على محور الصادات

$$F_1(0, c)$$

$$F_2(0, -c)$$

البؤرتان

$$V_1(0, a)$$

$$V_2(0, -a)$$

الرأسان

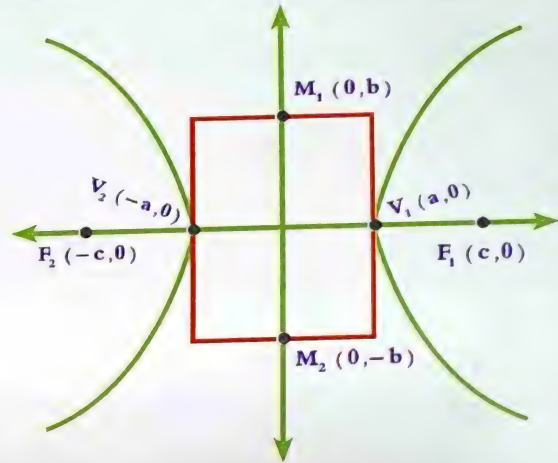
$$M_1(b, 0)$$

$$M_2(-b, 0)$$

القطبان

المعادلة القياسية:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$



قطع زائد بؤرتاه على محور السينات

$$F_1(c, 0)$$

$$F_2(-c, 0)$$

البؤرتان

$$V_1(a, 0)$$

$$V_2(-a, 0)$$

الرأسان

$$M_1(0, b)$$

$$M_2(0, -b)$$

القطبان

\* النقطتان  $(0, b) - (0, -b)$  سوف نسبها

القطبان فقط للتوضيح لم يطلق عليها اسم اقطاب

في المنهج .

المعادلة القياسية:

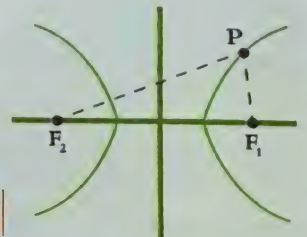
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

يسمى نصف القطر البؤري الايمن  $PF_1$

يسمى نصف القطر البؤري الايسر  $PF_2$

$$|PF_1 - PF_2| = 2a$$

القيمة المطلقة للفرق بين بعدي أي نقطة عن بؤرتيه.





## ملاحظات حول القطع الزائد

أولاً

مصطلحات القطع الزائد:

- $2a$  = طول المحور الحقيقي أو العدد الثابت أو البعد بين الرأسين .
- $2b$  = طول المحور المرافق ((التخيلي)) وهو عيودي المحور الحقيقي .
- $2c$  = البعد بين البؤرتين .

ثانياً

في القطع الزائد  $\begin{pmatrix} a & \text{أكبر} & c \\ b & \text{أكبر} & c \end{pmatrix}$  دائماً وقد تكون  $a = b$

ثالثاً

لاحظ المعادلة القياسية:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

السينات  $\uparrow$  الصادات  $\uparrow$  دائماً أول رقم يمثل  $a^2$  والثاني  $(b^2)$  لا يتغير .

رابعاً

لا يوجد قانون للمساحة والمحيط في القطع الزائد .

خامساً

الاختلاف المركزي (e) أكبر من (1) لذلك ان وجدت اختلاف مركزي أكبر من (1) هذا قطع زائد حتى وإن لم يذكر نوع القطع .

سادساً

في القطع الزائد:

① كل كلمة يمر (x, 0) أو (0, y) يعني هذا (a)

② كل يمس هذه a

③ كل يقطع عند رقم  $x = \pm$  ، رقم  $y = \pm$  هذا الرقم هو (a)

سابعاً

القوانين:

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} \quad c^2 = a^2 + b^2 \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$e = \frac{c}{a} \quad \text{الاختلاف المركزي}$$

ثامناً

عندما يذكر عبارة قطع زائد قائم معناها طول المحور الحقيقي = طول المحور المرافق

$$e = \sqrt{2} \quad \text{وأن} \quad 2a = 2b \Rightarrow a = b$$



## العلاقات بين القطوع

تعلم كيف تحدد العلاقة بين القطوع من خلال الأمثلة التوضيحية الآتية:

1 لو قال في السؤال مثلاً:

جد معادلة القطع الناقص الذي إحدى بؤرتيه // هي بؤرتة القطع المكافئ

$$P = C$$

مكافئ ناقص

معناها  
علامة يساوي  
=

2 لو قال في السؤال مثلاً:

جد معادلة القطع الزائد الذي رأساه // هما بؤرتا القطع الناقص

$$C = a$$

ناقص زائد

3 لو قال في السؤال مثلاً:

جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه تنطبقان // على بؤرتي القطع الزائد

$$C = C$$

ناقص زائد

معناها  
علامة يساوي  
=

4 لو قال في السؤال مثلاً:

جد معادلة القطع الناقص الذي أحد قطباه // هو رأس القطع الزائد

$$a = b$$

ناقص زائد

معناها  
علامة يساوي  
=

5 عبارة قطعان زائد وناقص كل منهما يمر ببؤرة الاخر معناها:

راجع السؤال الخامس والثامن  
عشر في الاسئلة الوزارية

\* عندما يذكر عبارة قطع زائد قائم معناها  
طول المحور الحقيقي = طول المحور المرافق

$$e = \sqrt{2} \quad \text{وأن} \quad 2a = 2b \Rightarrow a = b$$

$$C = a$$

ناقص زائد

$$C = a$$

ناقص زائد



## مقارنة بين القطع الناقص والزائد

القطع الزائد	القطع الناقص
أولاً: لا يوجد له مساحة ومحيط لذلك السؤال الذي فيه مساحة أو محيط ولم يذكر نوع القطع فهو ناقص.	ولاً: له مساحة ومحيط فكل سؤال يحوي مساحة ومحيط هذه القطع ناقص
ثانياً: الاختلاف المركزي أكبر من (1)	ثانياً: الاختلاف المركزي أصغر من (1)
ثالثاً: c أكبر من b, a	ثالثاً: a أكبر من b, c
رابعاً: المعادلة القياسية ذات إشارة سالبة $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ , $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$	إبعاً: المعادلة القياسية ذات إشارة موجبة $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$
خامساً: المصطلحات: 2a = طول المحور الحقيقي 2b = طول المحور المرافق	خامساً: المصطلحات: 2a = طول المحور الكبير 2b = طول المحور الصغير
سادساً: يقطع محور واحد عند a	سادساً: يقطع المحورين عند a, b

### أمثلة توضيحية:

قطع مخروطي مساحته  $20\pi \text{ cm}^2$  ..... الخ ← القطع ناقص / فيه مساحة .

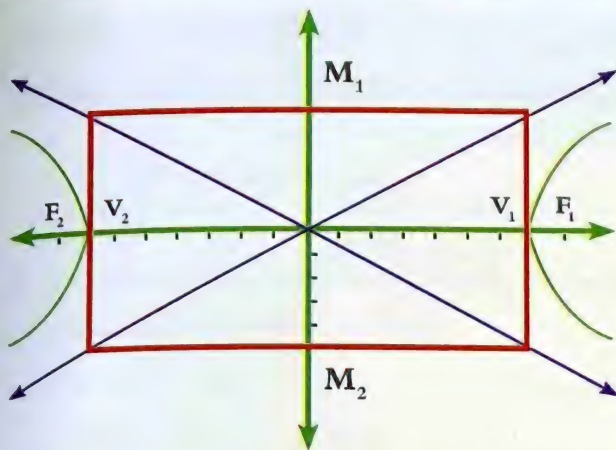
قطع مخروطي اختلافه المركزي 1.2 .... الخ ← القطع زائد / e أكبر من (1) .

قطع مخروطي رأسه (5, 0) وإحدى بؤرتيه (3, 0) ..... الخ / انقطع ناقص /  $a > c$  أكبر

قطع مخروطي رأسه (10, 0) وبهر من (0, 6) ..... الخ / قطع ناقص يقطع المحورين a, b

قطع مخروطي طول محوره الحقيقي 12 وحدة ..... الخ / قطع زائد / من مصطلح محور حقيقي .





1 مثال

عين البؤرتان والرأسان وطول المحورين والاختلاف المركزي للقطوع الزائدة التالية ثم ارسمها:

$$1 \quad \frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$$

$$a^2 = 64 \Rightarrow a = 8$$

$$b^2 = 36 \Rightarrow b = 6$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 64 + 36 \Rightarrow c^2 = 100 \Rightarrow c = 10$$

$$1 \quad \text{البؤرتان: } F_1(c, 0) \Rightarrow F_1(10, 0)$$

$$F_2(-c, 0) \Rightarrow F_2(-10, 0)$$

2 الرأسان:

$$V_1(a, 0) \Rightarrow V_1(8, 0)$$

$$V_2(-a, 0) \Rightarrow V_2(-8, 0)$$

$$3 \quad \text{طول المحور الحقيقي } 16 = 2a = \text{وحدة}$$

$$4 \quad \text{طول المحور المرافق } 12 = 2b = \text{وحدة}$$

5 الاختلاف المركزي:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

$$2 \quad 12x^2 - 4y^2 = 48$$

$$[12x^2 - 4y^2 = 48] \div 48$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

$$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$$

$$b^2 = 12 \Rightarrow b = 2\sqrt{3}$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 4 + 12 \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = 4$$

1 البؤرتان:

$$F_1(c, 0) \Rightarrow F_1(4, 0)$$

$$F_2(-c, 0) \Rightarrow F_2(-4, 0)$$

2 الرأسان:

$$V_1(a, 0) \Rightarrow V_1(2, 0)$$

$$V_2(-a, 0) \Rightarrow V_2(-2, 0)$$

$$3 \quad \text{طول المحور الحقيقي } 4 = 2a = \text{وحدة}$$

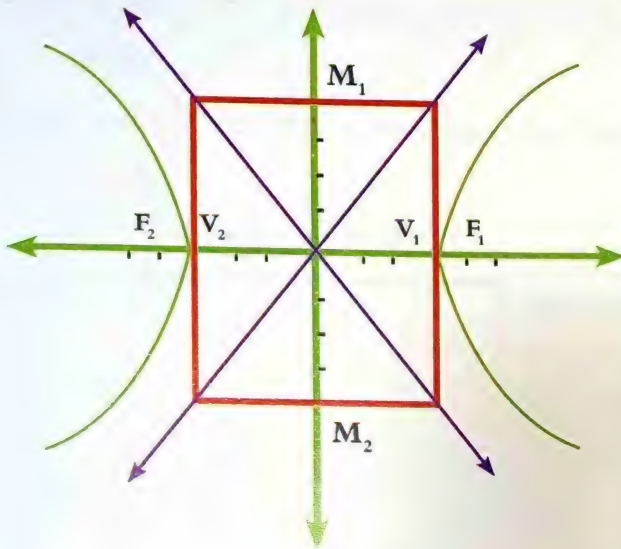
$$4 \quad \text{طول المحور المرافق } 4\sqrt{3} = 2b = \text{وحدة}$$



طول المحور الحقيقي  $\rightarrow$  وحدة  $2a = 2 \times 3 = 6$

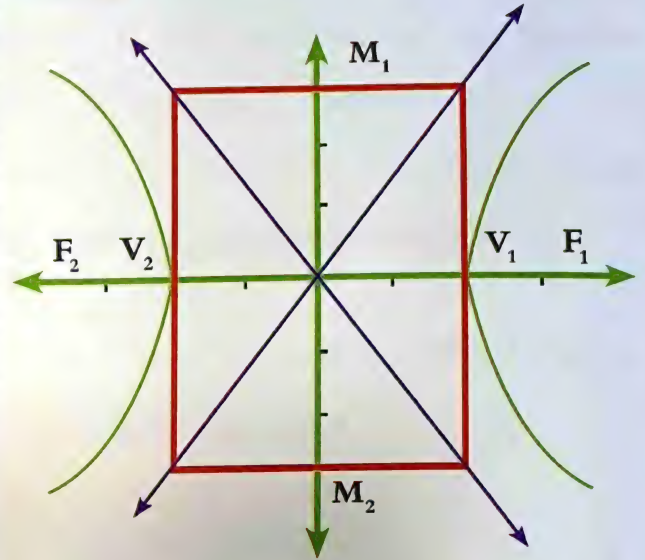
طول المحور المرافق  $\rightarrow$  وحدة  $2b = 2 \times 4 = 8$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$$



$$e = \frac{c}{a}$$

$$e = \frac{4}{2} = 2 > 1$$



$$3 \quad [16x^2 - 9y^2 = 144] \div 144$$

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

$$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$$

$$b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 9 + 16 \Rightarrow c^2 = 25 \Rightarrow c = 5$$

2006 - تمهيدي

2014 - نازحين

طريقة رسم القطع الزائدي

1 نعين الرأسات  $V_1, V_2$

2 نعين النقطتين  $M_1, M_2$

3 هذه النقاط الاربعة تكون مستطيل اضلاعه

توزاي المحورين .

4 نرسم قطري المستطيل فهما يمثلان

المحاذيات .

5 نغير البؤرتين  $F_1, F_2$  ثم نرسم ذراعي

القطع .

1 البؤرتان :

$$F_1(c, 0) \Rightarrow F_1(5, 0)$$

$$F_2(-c, 0) \Rightarrow F_2(-5, 0)$$

2 الرأسات :

$$V_1(a, 0) \Rightarrow V_1(3, 0)$$

$$V_2(-a, 0) \Rightarrow V_2(-3, 0)$$



إذا طلب معادلة القطع الزائد نتبع ما سبق ذكره من الملاحظات

**مثال 3** جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه  $(\pm 5, 0)$  ويتقاطع مع محور السينات عند  $x = \pm 3$  ومركزه نقطة الأصل.

$c = 5$  ((سينات))

كل يتقاطع في القطع الزائد هو (a)  
 $a = 3$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$b = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16}$$

$$b = 4$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

**مثال 4** جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وطول محوره الحقيقي (6) وحدات والاختلاف المركزي (2) والبؤرتان على محور السينات.

طول محوره الحقيقي  $= 2a \Rightarrow [2a = 6] \div 2$   
 $a = 3$

تعويض  $e = \frac{c}{a}$

2011 / خارج القطر

$$2 = \frac{c}{3} \Rightarrow c = 6$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$b = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27}$$

$$b^2 = 27$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1$$

**مثال 1** جد معادلة القطع الزائد الذي لحوال محوره الحقيقي (12) وحدة طول وطول محوره المرافق (10) وحدة طول.

$$2a = 12 \Rightarrow a = 6$$

$$2b = 10 \Rightarrow b = 5$$

لم يحدد موقع البؤرة

الصادات	سينات
$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
$\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{25} = 1$	$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{25} = 1$

**مثال 2** جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وطول محوره المرافق (4) وحدات وبؤرتاه  $(0, \sqrt{8})$  ,  $(0, -\sqrt{8})$ .

$$2b = 4 \Rightarrow b = 2$$

$$c = \sqrt{8} \text{ ((صادات))}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$a = \sqrt{8 - 4} = \sqrt{4}$$

$$a = 2$$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{4} = 1$$



5

مثال

جد معادلة القطع الزائد الذي لول محوره المرافق (  $2\sqrt{2}$  ) وحدة واختلافه لمركزي يساوي (3) ومركزه نقطة الأصل بؤرته على محور الصادات .

$$2b = 2\sqrt{2} \Rightarrow b = \sqrt{2}$$

(2) د - 2013

2017 - د (1) / تطبيقي / موصل

$$e = \frac{c}{a}$$

$$3 = \frac{c}{a} \Rightarrow c = 3a \dots\dots\dots (1)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \text{القانون العام}$$

$$(3a)^2 = a^2 + (\sqrt{2})^2$$

$$9a^2 - a^2 = 2 \Rightarrow [8a^2 = 2] \div 8$$

$$a^2 = \frac{1}{4}$$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{\frac{1}{4}} - \frac{x^2}{2} = 1$$

6

مثال

قطع زائد طول محوره الحقيقي وحدات وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل وبهر بالنقطتين (  $1, 2\sqrt{5}$  ) (  $1, -2\sqrt{5}$  ) جد معادلتا القطعين المكافئ والزائد .

ربع أول ربع رابع

$$(1, 2\sqrt{5}) \quad (1, -2\sqrt{5})$$

الفتحة يمين

لقطع المكافئ :



$$y^2 = 4Px$$

$$(2\sqrt{5})^2 = 4P(1)$$

$$[20 = 4P] \div 4 \Rightarrow P = 5$$



**مثال 8** جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه هما بؤرتا القطع الزائد  $x^2 - 3y^2 = 12$  والنسبة بين طولي محوريه  $\frac{5}{3}$  ومركزه نقطة الاصل

القطع الزائد:

$$[x^2 - 3y^2 = 12] \div 12$$

$$\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 12 + 4 \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = 4$$

القطع الناقص:

بؤرتاه هما بؤرتي القطع الزائد

$$\frac{c}{\text{ناقص}} = \frac{c}{\text{زائد}}$$

$$c = 4$$

النسبة بين طولي محوريه  $\frac{5}{3} = \frac{\text{كبير}}{\text{صغير}}$

$$\frac{5}{3} = \frac{a}{b}$$

$$[3a = 5b] \div 5 \Rightarrow b = \frac{3}{5}a \dots\dots(1)$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = \left(\frac{3}{5}a\right)^2 + (4)^2$$

$$[a^2 = \frac{9}{25}a^2 + 16] \cdot 25$$

$$25a^2 - 9a^2 = 400 \Rightarrow 16a^2 = 400 \Rightarrow a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$$

$$[16a^2 = 400] \div 16 \Rightarrow a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$$

$$b = \frac{3}{5}a$$

$$b = \frac{3}{5}(5) \Rightarrow b = 3$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

**مثال 7** جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$  ويهس دليل القطع المكافئ  $x^2 + 12y = 0$

القطع الناقص:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

$$(1) \text{ د } 2001$$

$$(2) \text{ د } 2014$$

$$(1) \text{ د } 2015$$

$$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$$

$$(1) \text{ د } 2017$$

$$b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$$

$$(1) \text{ د } 2019$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$c = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16}$$

$$c = 4$$

القطع المكافئ:

$$x^2 + 12y = 0$$

$$x^2 = -12y$$

$$x^2 = -4Py \Rightarrow [4P = 12] \div 4$$

$$P = 3$$

القطع الزائد:

بؤرتي القطع الناقص

هما

بؤرتاه

ناقص

=

زائد

$$c = 4$$

$$a = P \Rightarrow a = 3$$

كل يهس هو (a)

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$b = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$$

$$b^2 = 7$$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{7} = 1$$



ملاحظة ومثال

عندما يعطي في السؤال بعدي احد الرأسين عن البؤرتين بشكل عددين فأنا نستخدم المجموع والفرق .

$$2c = \text{مجموع البعدين}$$

$$2a = \text{حاصل طرح البعدين}$$

مثال 9

اكتب معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل إذا علمت ان أحد الرأسين يبعد بالبعد 1،9 وحدات بالترتيب عن البؤرتين وينطبق محوره على المحورين الاحداثيين .

$$\text{المجموع} \Rightarrow [2c = 10] \div 2 \Rightarrow 9 + 1 = 2c$$

$$c = 5$$

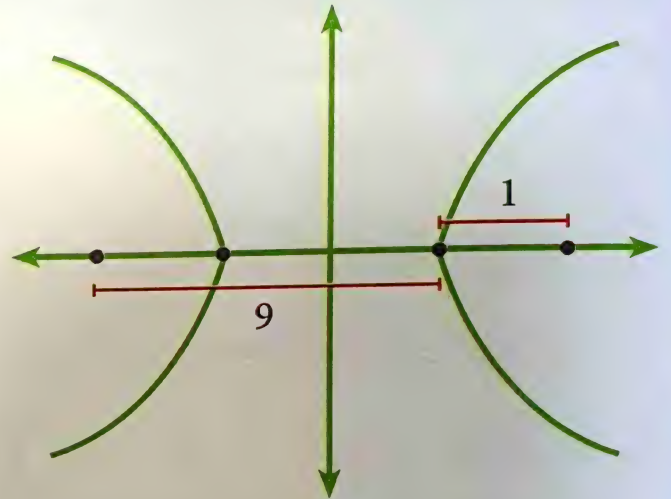
$$\text{الطرح} \Rightarrow [2a = 8] \div 2 \Rightarrow 9 - 1 = 2a$$

$$a = 4$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$b = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9}$$

$$b = 3$$



رسم توضيحي تم اخذه على محور السينات

لم يحدد موقع البؤرة

2015 - تمهيدي

$$\text{سينات} \Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\text{صادات} \Rightarrow \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$$



ملاحظة

1 كل نقطة تنتمي الى قطع أو منحنى فإن هذه النقطة تحقق معادلة القطع أو المنحنى أي يمكن تعويضها بمعادلة القطع أو المنحنى خاصة وان كانت معادلة القطع تحوي مجهول.

2 إذا طلب نصف القطر البؤري نستخدم قانون المسافة بين نقطتين.

$$PF = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

\* إذا طلب نصف القطر البؤري الايمن  $PF_1$  فنستخدم نقطة السؤال والبؤرة الموجبة.  
\* إذا طلب نصف القطر البؤري الايسر  $PF_2$  فنستخدم نقطة السؤال والبؤرة السالبة.

نجد  $F_1$  أولاً ثم نجد المسافة بين  $F_1$  والنقطة P

$$[x^2 - 3y^2 = 12] \div 12$$

$$\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow a^2 = 12, b^2 = 4$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 12 + 4 \Rightarrow c^2 = 16$$

$$c = 4 \rightarrow F_1 (4, 0) \quad P (6, 2\sqrt{2})$$

$x_1 \ y_1 \quad \quad \quad x_2 \ y_2$

(قبة L)

$$PF_1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$PF_1 = \sqrt{(6 - 4)^2 + (2\sqrt{2} - 0)^2}$$

$$PF_1 = \sqrt{(2)^2 + (2\sqrt{2})^2}$$

$$PF_1 = \sqrt{4 + 8} = \sqrt{12}$$

$$PF_1 = 2\sqrt{3} \quad \text{وحدة}$$

1999 - د (1) 2010 - تمهيد

2017 - د (2) / تطبيقي / خارج

2018 - د (2) / احيائي / خارج

10 مثال

النقطة  $P(6, L)$  تنتمي الى القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل ومعادلته  $x^2 - 3y^2 = 12$  جد:

أولاً: قيمة (L).

النقطة  $P(6, L)$  تحقق معادلة القطع الزائد.

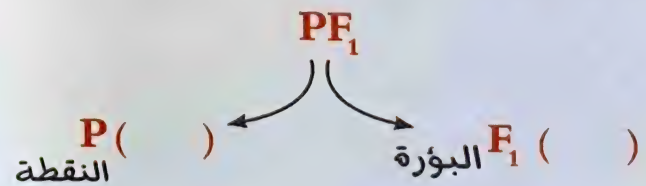
$$x^2 - 3y^2 = 12$$

$$(6)^2 - 3L^2 = 12 \Rightarrow 36 - 3L^2 = 12$$

$$36 - 12 = 3L^2 \Rightarrow [24 = 3L^2] \div 3$$

$$L^2 = 8 \Rightarrow L = \pm 2\sqrt{2}$$

ثانياً: نصف القطر البؤري الايمن  $PF_1$  للقطع المرسوم من الجهة اليمنى للنقطة P



\* نجد البؤرة وبعدها نجد المسافة بين البؤرة الموجبة والنقطة



11 مثال

قطع زائد مركزه نقطة الأصل ومعادلته  $hx^2 - ky^2 = 90$  وطول محوره الحقيقي  $9\sqrt{2}$  وحدة وبؤرتاه تنطبقان على بؤرتا القطع الناقص الذي معادلته  $9x^2 + 16y^2 = 576$  جد قيمه  $h, k \in \mathbb{R}$ .

معادلة السؤال (التي تحوي مجاهيل)

$$[hx^2 - ky^2 = 90] \div 90 \Rightarrow \frac{hx^2}{90} - \frac{ky^2}{90} = 1$$

$$\frac{x^2}{\frac{90}{h}} - \frac{y^2}{\frac{90}{k}} = 1$$

(1) د - 1998

(2) د - 2012

د - 2017 / (1) احيائي

د - 2017 / (1) احيائي / خارج

د - 2018 / (2) تطبيقي / خارج

د - 2019 / (2) تطبيقي

$$\frac{90}{h} = 18 \Rightarrow h = \frac{90}{18} \Rightarrow h = 5$$

$$\frac{90}{k} = 10 \Rightarrow k = \frac{90}{10} \Rightarrow k = 9$$

استراحة شعرية:

ويا ليت أبواب المدينة كلها  
تُسدُّ وبابٌ في فؤادك يفتح

$$[9x^2 + 16y^2 = 576] \div 576$$

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1, \quad a^2 = 64, \quad b^2 = 36$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$c = \sqrt{64 - 36} = \sqrt{28}$$

$$c = 2\sqrt{7}$$

لقطع الزائد:

$$2a = 6\sqrt{2} \Rightarrow a = 3\sqrt{2}$$

$$a = 3\sqrt{2}$$

بؤرتاه	تنطبقان	على بؤرة القطع الناقص
$c$ زائد	=	$c$ ناقص

$$c = 2\sqrt{7} \quad \text{زائد}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$b = \sqrt{28 - 18}$$

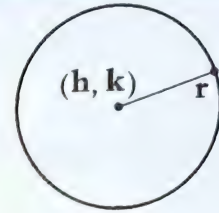
$$b = \sqrt{10} \Rightarrow b^2 = 10$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{10} = 1$$



ربط الدائرة مع القطوع

المعادلة العامة للدائرة  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \rightarrow$



(A, B, C تؤخذ قيم من المعادلة مع الاشارات)

A ← معامل x

B ← معامل y

C ← الحد المطلق (بدون x أو y)

\* معامل  $x^2 = y^2$  معامل 1 ← انتبه

أولاً: نجد المركز  $c(h, k)$

$$\left. \begin{array}{l} h = \frac{-A}{2} \\ k = \frac{-B}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow c(h, k)$$

ثانياً: نجد نصف القطر

$$r = \sqrt{h^2 + k^2 - c}$$

مثال / جد نصف القطر واحداثي المركز للدائرة التي معادلتها  $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$  (مراجعة من الخامس علمي)

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$$

$$A = -2, B = -4, C = -4$$

$$\left. \begin{array}{l} h = \frac{-A}{2} = \frac{-(-2)}{2} = 1 \\ k = \frac{-B}{2} = \frac{-(-4)}{2} = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow c(1, 2) \text{ مركز}$$

$$r = \sqrt{h^2 + k^2 - c}$$

$$r = \sqrt{(1)^2 + (2)^2 - (-4)}$$

$$r = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9}$$

$$r = 3 \text{ unit}$$

نصف القطر





جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتيه هي مركز الدائرة  $x^2 + y^2 - 16y + 15 = 0$  ونصف طول محوره الهرايق يساوي نصف قطر تلك الدائرة.

$$x^2 + y^2 - 16y + 15 = 0 \rightarrow x^2 + y^2 + 0x - 16 + 15 = 0$$

2018 - د (3) / احياني

$$A = 0, B = -16, C = 15$$

$$\left. \begin{aligned} h &= \frac{-A}{2} = \frac{0}{2} = 0 \\ k &= \frac{-B}{2} = \frac{-(-16)}{2} = 8 \end{aligned} \right\} \Rightarrow C(h, k) \Rightarrow (0, 8)$$

احداثي المركز

$$r = \sqrt{h^2 + k^2 - c} = \sqrt{(0)^2 + (8)^2 - 15} = \sqrt{64 - 15} = \sqrt{49}$$

$$r = 7 \text{ unit}$$

القطع الزائد احدى بؤرتيه هي مركز الدائرة  $(0, 8)$  ← البؤرة هي

$$c = 8$$

صادات

نصف طول محوره الصغير يساوي نصف قطر الدائرة

$$r = \frac{1}{2}(2b) \Rightarrow r = b \Rightarrow b = 7$$

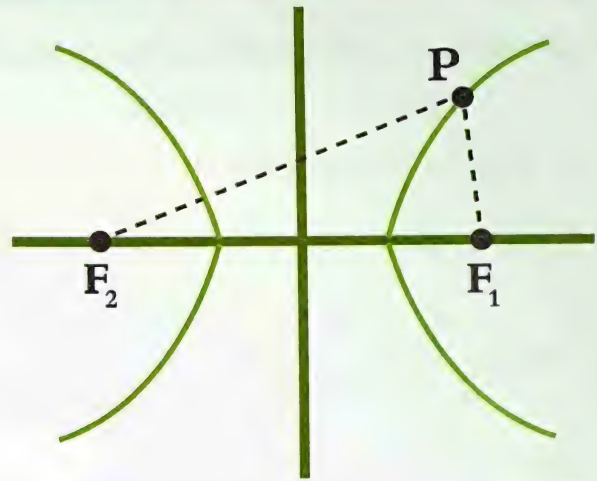
$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{64 - 49} = \sqrt{15} \Rightarrow a = \sqrt{15}$$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{15} - \frac{x^2}{49} = 1$$

والكوخِ عِنْدِي فِي جِوَارِكَ جَنَّةٌ  
وَالْقَصْرُ دُونَكَ كَالْفِضَا الْمَهْجُورُ



إيجاد معادلة القطع الزائد باستخدام التعريف



القانون  $|PF_1 - PF_2| = 2a$

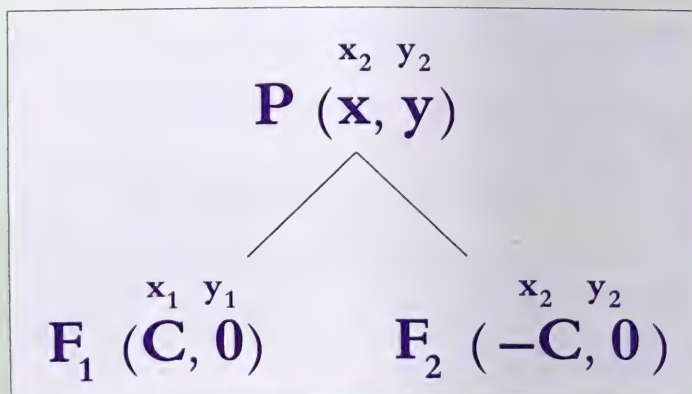
$$\left| \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} - \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \right| = 2a$$

هناك عدة خطوات لحل السؤال

القانون ← التعويض ← التحويل ← التربيع ← الارجاع ← التربيع ثم تصفية الطرفين

ارجاع الجذر  
الى الطرف الأيسر

تحويل أحد الجذرين  
الى الطرف الأيمن





باستخدام التعريف جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه  $(2, \sqrt{2}, 0)$  ,  $(-2\sqrt{2}, 0)$  وينطبق محوره على المحورين الاحداثيين والقيمه المطلقة للفرق بين بعدي أي نقطة عن بؤرتيه  $= 4$  وحدات .

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x_2 & y_2 \\ P(x, y) \end{matrix} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \begin{matrix} x_1 & y_1 \\ F_1(2\sqrt{2}, 0) \end{matrix} \quad \begin{matrix} x_2 & y_2 \\ F_2(-2\sqrt{2}, 0) \end{matrix} \end{array}$$

$$|PF_1 - PF_2| = 2a$$

$$\left| \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} - \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \right| = 2a \quad \text{القانون}$$

$$\sqrt{(x - 2\sqrt{2})^2 + (y - 0)^2} - \sqrt{(x + 2\sqrt{2})^2 + (y - 0)^2} = \pm 4 \quad \text{التعويض}$$

هذا الجذر يبقى      ننقل الجذر للطرف الاخر

$$\sqrt{(x - 2\sqrt{2})^2 + y^2} = \pm 4 + \sqrt{(x + 2\sqrt{2})^2 + y^2} \quad \text{تربيع الطرفين}$$

$$(x - 2\sqrt{2})^2 + y^2 = 16 \pm 8\sqrt{(x + 2\sqrt{2})^2 + y^2} + (x + 2\sqrt{2})^2 + y^2$$

الجذر حذف مع التربيع      هذا الطرف مربع حدانية

$$x^2 - 4\sqrt{2}x + 8 = 16 \pm 8\sqrt{x^2 + 4\sqrt{2}x + 8 + y^2} + x^2 + 4\sqrt{2}x + 8 \quad \text{فتح القوس}$$

ارجاع الجذر الى الطرف الاصلي

$$\pm 8\sqrt{x^2 + 4\sqrt{2}x + 8 + y^2} = 16 + 4\sqrt{2}x + 4\sqrt{2}x \quad \text{التصفية}$$

$$\left[ \pm 8\sqrt{x^2 + 4\sqrt{2}x + 8 + y^2} = 16 + 8\sqrt{2}x \right] \div 8$$

$$\pm \sqrt{x^2 + 4\sqrt{2}x + 8 + y^2} = (2 + \sqrt{2}x) \quad \text{تربيع الطرفين}$$

$$x^2 + 4\sqrt{2}x + 8 + y^2 = 4 + 4\sqrt{2}x + 2x^2$$

$$2x^2 - x^2 - y^2 = 8 - 4 \Rightarrow [x^2 - y^2 = 4] \div 4$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$$



الاسئلة الوزارية الخاصة بالقطع الزائد والربط بين القطوع الثلاثة

**سؤال 2** جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الناقص  $3x^2 + 5y^2 = 120$  والنسبة بين طول محوره الحقيقي والبعد بين بؤرتيه كنسبة  $\frac{1}{2}$ .

(2001 - د 1)

القطع الناقص:  $\left[ \frac{3x^2}{120} + \frac{5y^2}{120} = \frac{120}{120} \right] \div 120$

$\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{24} = 1$  ,  $a^2 = 40$  ,  $b^2 = 24$  ((سينات))

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$   
 $c = \sqrt{40 - 24} = \sqrt{16}$   
 $c = 4$

القطع الزائد:

$\frac{C}{\text{زائد}} = \frac{C}{\text{ناقص}} \Rightarrow c = 4$

$\frac{2a}{2c} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{1}{2}$

$\frac{a}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow [2a = 4] \div 2$   
 $a = 2$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$   
 $b = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12}$   
 $b^2 = 12$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$

**سؤال 1** جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص  $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$  وأحد رأسيه بؤرة القطع المكافئ  $y^2 + 8x = 0$ .

(1997 - د 2)

القطع الناقص:  $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$

$a^2 = 36$  ,  $b^2 = 20$  ((سينات))

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$   
 $c = \sqrt{36 - 20} = \sqrt{16}$   
 $c = 4$

القطع المكافئ:

$y^2 = -8x$

$y^2 = -4Px \Rightarrow [4P = 8] \div 4$

القطع الزائد:  $\frac{C}{\text{زائد}} = \frac{C}{\text{ناقص}} \Rightarrow c = 4$

$P = a \Rightarrow a = 2$   
زائد مكافئ

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$   
 $b = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12}$   
 $b^2 = 12$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$



سؤال 3

جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطعين المكافئين  $y^2 = -20x$  ,  $y^2 = 20x$  بين طولي محوريه الحقيقي والرافق يساوي (2) وحدة.

القطع المكافئ:

$$y^2 = 20x$$

$$y^2 = 4Px \Rightarrow [4P = 20] \div 4 \Rightarrow P = 5, F(5, 0)$$

$$y^2 = -20x$$

$$y^2 = -4Px \Rightarrow [4P = 20] \div 4 \Rightarrow P = 5, F(-5, 0)$$

القطع الزائد:

$$C = P \Rightarrow c = 5$$

الفرق بين طولي محوريه الحقيقي والرافق

$$[2a - 2b = 2] \div 2$$

$$a - b = 1 \Rightarrow a = 1 + b \quad (1)$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$(5)^2 = (1+b)^2 + b^2 \Rightarrow 25 = 1 + 2b + b^2 + b^2$$

$$2b^2 + 2b + 1 - 25 = 0$$

$$[2b^2 + 2b - 24 = 0] \div 2$$

$$b^2 + b - 12 = 0$$

$$(b+4)(b-3) = 0$$

لا يمكن ان تكون سالبة لذلك يُهمل  $b+4=0$  أما

نعوض في معادلة (1)  $b-3=0 \Rightarrow b=3$  أو

$$a = 1 + b = 1 + 3 \Rightarrow a = 4$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

ملاحظة

حرف العطف (و) في اللغة العربية ((الفرق بين طولي محوريه الحقيقي والرافق)) تحمل وجهين:

$$2a - 2b = 2 \leftarrow \text{الأول}$$

$$2b - 2a = 2 \leftarrow \text{الثاني}$$

تم حل السؤال على الاحتمال الأول وسنتطرق الى الوجه الثاني من الحل.

$$[2b - 2a = 2] \div 2$$

$$b - a = 1 \Rightarrow b = 1 + a \quad (1)$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$(5)^2 = a^2 + (1+a)^2$$

$$25 = a^2 + 1 + 2a + a^2$$

$$2a^2 + 2a - 24 = 0 \div 2$$

$$a^2 + a - 12 = 0$$

$$(a+4)(a-3) = 0$$

لا يمكن ان تكون سالبة لذلك يُهمل  $a+4=0$

$$a - 3 = 0 \Rightarrow a = 3$$

$$b = 1 + a = 1 + 3 = 4$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$



سؤال 4

جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما رأسا القطع الناقص  $x^2 + 9y^2 = 36$  والنسبة بين طول محوره الحقيقي الى البعد بين بؤرتيه تساوي  $\left(\frac{1}{2}\right)$  وينطبق محوره على المحورين الاحداثيين.

2002 - د (2)

القطع الناقص:  $\left[ \frac{x^2}{36} + \frac{9y^2}{36} = \frac{36}{36} \right] \div 36$

$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1$  ,  $a^2 = 36 \Rightarrow a = 6$

القطع الزائد:

بؤرتاه	هما	رأسا القطع الناقص
زائد $c$	$=$	ناقص $a$

$c = 6$

$\frac{2a}{2c} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{1}{2}$

$\frac{a}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow [2a = 6] \div 2$

$a = 3$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$

$b = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27}$

$b^2 = 27$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1$

سؤال 5

جد معادلة القطع الزائد الذي يمر ببؤرتي القطع الناقص  $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$  والنسبة بين البعد بين بؤرتيه وطول محوره المرافق كنسبة  $\frac{5}{4}$ .

القطع الناقص:  $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$

$a^2 = 49$  ,  $b^2 = 24$  ((سينات))

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$

$c = \sqrt{49 - 24} = \sqrt{25}$

$c = 5$

القطع الزائد:

قال يمر وكل يمر  $a$  في القطع الزائد

$a = 5$

$\frac{2c}{2b} = \frac{5}{4} [4c = 5b] \div 4 \Rightarrow c = \frac{5}{4}b$  ..... (1)

$c^2 = a^2 + b^2$

$\left(\frac{5}{4}b\right)^2 = (5)^2 + b^2$

$\left[\frac{25}{16}b^2 = 25 + b^2\right] \cdot 16 \Rightarrow 25b^2 = 400 + 16b^2$

$25b^2 - 16b^2 = 400 \Rightarrow 9b^2 = 400$

$b^2 = \frac{400}{9}$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{\frac{400}{9}} = 1$



سؤال 6

قطعتان زائد وناقص كل منهما يمر ببؤرة الآخر جد معادلة القطع الزائد اذا علمت ان معادلة القطع الناقص هي  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$  علماً ان محوريها على المحورين الاحداثيين .

القطع الناقص:

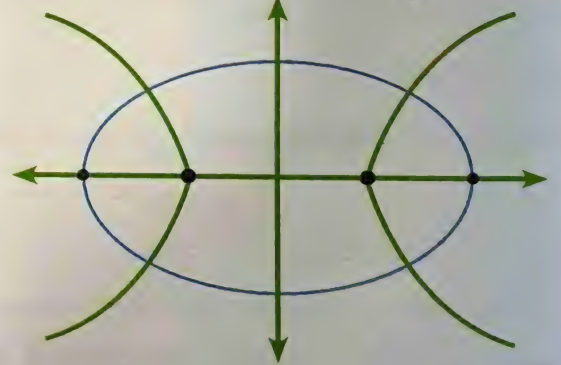
$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$a^2 = 25 \rightarrow a = 5, \quad b^2 = 9 \rightarrow b = 3$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9}$$

$$c = \sqrt{16} \Rightarrow c = 4$$

رسم توضيحي



القطع الزائد:

$$a = c \Rightarrow a = 4 \quad \text{للزائد ناقص}$$

$$c = a \Rightarrow c = 5 \quad \text{للزائد ناقص}$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9}$$

$$b = 3 \quad \text{للزائد}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

سؤال 7

جد معادلة القطع المخروطي الذي محوره هما المحورين الاحداثيين واحدى بؤرتيه  $(-5, 0)$  واحدا رأسيه  $(3, 0)$  .

2004 - د (2) 2005 - تمهيدي 2006 - د (2) 2008 - د (2) 2014 - د (3)

$$c = 5 \rightarrow (-5, 0) \text{ البؤرة}$$

$$a = 3 \rightarrow (3, 0) \text{ الرأس}$$

$a < c$  «أصغر» أي ان القطع زائد

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$b = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} \Rightarrow b = 4$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

سؤال 8

جد معادلة القطع الزائد الذي احدي بؤرتيه نقطة تقاطع المستقيم  $2x - y = 8$  مع محور السينات وطول محوره التخيلي (4) وحدات .

2007  
تمهيدي

(نقطة التقاطع مع محور السينات)  $y = 0$

$$2x - 0 = 8 \Rightarrow [2x = 8] \div 2 \Rightarrow x = 4$$

$$(4, 0) \rightarrow c = 4$$

$$2b = \text{طول محوره التخيلي} \Rightarrow [2b = 4] \div 2$$

$$b = 2$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$a = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12}$$

$$a^2 = 12$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$$



$$a^2 = 4, b^2 = 32, c = ?$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

بالجذر

$$c^2 = 4 + 32 \Rightarrow c^2 = 36 \Rightarrow c = 6$$

القطع المكافئ:

$$y^2 = -16x$$

$$y^2 = -4Px \Rightarrow [4P = 16] \div 4$$

$$P = 4$$

القطع الناقص بؤرتاه هما بؤرتي القطع الزائد

$$c = c \Rightarrow c = 6$$

زائد ناقص

$$P = b \Rightarrow b = 4$$

مكافئ ناقص

\* كل يمس في القطع الناقص اما  $a$  أو  $b$  هنا أصبحت  $b$  لسببين:

① لأن  $a$  يجب ان تكون أكبر من  $c$  إذا أصبحت  $a=4$  تكون أصغر من  $c$  وهي (6).

② لأن البؤرة صادات والمكافئ سينات والذي يخالف البؤرة هو قطب  $b$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = 4^2 + 6^2$$

$$a^2 = 16 + 36 \Rightarrow a^2 = 52$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{52} = 1$$

سؤال 9 جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطعين المكافئين  $y^2 = 20x, y^2 = -20x$  وطول محوره الهراقي (8) وحدات.

2005 د (1) 2008 د (1) 2015 د (4) رصافة

القطع المكافئ:

$$y^2 = 20x$$

$$y^2 = 4Px \Rightarrow [4P = 20] \div 4 \Rightarrow P = 5$$

$$F(5, 0)$$

$$y^2 = -20x$$

$$y^2 = -4Px \Rightarrow 4P = 20 \div 4 \Rightarrow P = 5$$

$$F(-5, 0)$$

القطع الزائد:

$$P = c \Rightarrow c = 5$$

$$P = 2b \Rightarrow [2b = 8] \div 2$$

$$b = 4$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$a = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9}$$

$$a = 3$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

سؤال 10 جد معادلة القطع الناقص الذي

بؤرتاه هما بؤرتي القطع الزائد  $8y^2 - x^2 = 32$  ويمس دليل القطع المكافئ  $y^2 + 16x = 0$ .

القطع الزائد:

$$[8y^2 - x^2 = 32] \div 32 \Rightarrow \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{32} = 1$$



سؤال 11

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل والبعد بين بؤرتيه (8) وحدات ورأساه بؤرتا القطع الزائد  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

2007 - د (1)

القطع الزائد:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$$a^2 = 16, b^2 = 9 \text{ سينات}$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 16 + 9 \Rightarrow c^2 = 25 \Rightarrow c = 5$$

القطع الناقص:

$$a = c \Rightarrow a = 5$$

$$[2c = 8] \div 2 \Rightarrow 2c = 8 \Rightarrow c = 4$$

$$c = 4$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

$$b = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9}$$

$$b = 3$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

سؤال 12

جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما رأسا القطع الناقص  $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$  وطول محوره الحقيقي (12) وحدة وينطبق محوره على المحورين الاحداثيين.

2007

خارج القطر

القطع الناقص:

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1 \quad a^2 = 100 \Rightarrow a = 10$$

$$V_1 (10, 0), V_2 (-10, 0)$$

القطع الزائد:

القطع الزائد بؤرتاه هما رأسا القطع الناقص

a

=

c

$$c = 10 \text{ للزائد}$$

$$2a = 12 \Rightarrow a = 6 \text{ للزائد}$$

$$a = 6$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$b = \sqrt{100 - 36}$$

$$b = \sqrt{64} \Rightarrow b = 8$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$$



**سؤال 14** جد معادلة القطع الناقص الذي يمر ببؤرتي القطع الزائد  $9y^2 - 16x^2 = 144$  ويقطع من محور السينات جزءاً طوله 12 وحدة.

(2009 - د 1)

القطع الزائد:

$$[9y^2 - 16x^2 = 144] \div 144$$

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1 \quad a^2 = 16, b^2 = 9 \quad \text{صادات}$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 16 + 9$$

$$c^2 = 25 \rightarrow c = 5 \rightarrow F_1(0, 5), F_2(0, -5)$$

القطع الناقص:

القطع الناقص يمر من بؤرة الزائد

(0, 5)

$$b = 5 \quad \text{أو} \quad a = 5$$

الجزء المقطوع يمر من محور السينات

$$[2a = 12] \div 2 \quad a = 6 \quad \text{أما}$$

$$[2b = 12] \div 2 \quad b = 6 \quad \text{أو}$$

الأكبر  $a = 6 \leftarrow$  سينات

الأصغر  $b = 5 \leftarrow$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$$

**سؤال 13** جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الناقص  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$  والنسبة بين طول محوره الحقيقي الى البعد بين بؤرتيه تساوي  $(\frac{1}{2})$

2008

تمهيدي

القطع الناقص:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1, a^2 = 25, b^2 = 9, c = ?$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$c = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16}$$

للقطع الناقص  $c = 4$

القطع الزائد:

بؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الناقص

$c$   
ناقص

=

$c$   
زائد

$$c = 4$$

$$\frac{\text{طول محوره الحقيقي}}{\text{البعد بين بؤرتيه}} = \frac{2a}{2c} \Rightarrow \frac{2a}{2c} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow [2a = 4] \div 2$$

للزائد  $a = 2$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$b = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12}$$

$$b^2 = 12$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$



**سؤال 16** جد معادلة القطع المخروطي الذي مركزه نقطة الأصل وينطبق محوره على المحورين الاحداثيين واختلافه المركزي يساوي (3) ويمر بالنقطة (0, 2).

2016  
تمهيدي

\* القطع زائد لأن  $e > 1$

الاختلاف المركزي أكبر من (1)

(رأس صادات)  $a = 2 \rightarrow (0, 2)$

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{3}{1} = \frac{c}{2}$$

$$c = 6$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$b = \sqrt{36 - 4}$$

$$b = \sqrt{32} \Rightarrow b^2 = 32$$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{32} = 1$$

إستراحة شعرية

دع حب أو من كلفت بحبه  
ما الحب إلا للحبيب الآخر  
ما قد تولد لا ارتجاع لطيبه  
هل غائب اللذات مثل الحاضر

**سؤال 15** جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرقاه هما بؤرتي القطع الناقص  $25x^2 + 9y^2 = 225$  وبمس دلييل القطع المكافئ الذي معادلته  $x^2 + 8y = 0$ .

2015 - د (3)

القطع الناقص:

$$[25x^2 + 9y^2 = 225] \div 225$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1, \quad a^2 = 25, b^2 = 9$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$c = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16}$$

$$c = 4$$

القطع المكافئ:

$$x^2 = -8y$$

$$x^2 = -4Py \Rightarrow [4P = 8] \div 4$$

$$P = 2$$

القطع الزائد:  $c = c \Rightarrow c = 4$   
ناقص زائد

$$P = a \Rightarrow a = 2$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

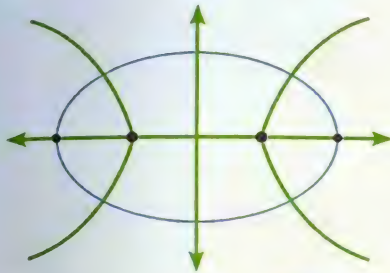
$$b = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12}$$

$$b^2 = 12$$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{12} = 1$$



**سؤال 18** جد معادلة القطع الزائد والناقص اذا كان كل منهما يمر ببؤرتي الاخر وكلاهما تقعات على محور السينات وطول المحور الكبير يساوي  $6\sqrt{2}$  وحدة طول وطول المحور الحقيقي يساوي (6) وحدة طول.



(1) د - 2016

2017 - د (2) / تطبيقي / موصل

القطع الزائد:  $[2a = 6] \div 2$

زائد  $a = 3$

القطع الناقص:  $[2a = 6\sqrt{2}] \div 2$

ناقص  $a = 3\sqrt{2}$

ناقص  $a = c \rightarrow c = 3$  زائد

زائد  $a = c \rightarrow c = 3\sqrt{2}$  ناقص

الناقص	الزائد
$b = \sqrt{a^2 - c^2}$	$b = \sqrt{c^2 - a^2}$
$b = \sqrt{18 - 9} = \sqrt{9}$	$b = \sqrt{18 - 9} = \sqrt{9}$
$b = 3$	$b = 3$
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
$\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$	$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$

**سؤال 17** جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه تقعات على محور السينات ومجموع طولي محوريه يساوي (18) وحدة وبؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الزائد  $x^2 - 2y^2 = 6$ .

القطع الزائد:  $[x^2 - 2y^2 = 6] \div 6$

2014  
نازحين

$\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1$  ,  $a^2 = 6, b^2 = 3$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 6 + 3$

$c^2 = 9 \rightarrow c = 3$

$c = c$   
ناقص زائد

القطع الناقص:

$c = 3$

مجموع طولي محوريه  $[2a + 2b = 18] \div 2$

$a + b = 9 \Rightarrow a = 9 - b$  ..... (1)

$a^2 = b^2 + c^2$

$(9 - b)^2 = b^2 + (3)^2$

$81 - 18b + b^2 = b^2 + 9 \Rightarrow 18b = 81 - 9$

$[18b = 72] \div 18 \Rightarrow b = 4$

$a = 9 - b$

$a = 9 - 4 \Rightarrow a = 5$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$



سؤال 19

عين النقاط على القطع الزائد الذي معادلته  $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{1} = 1$  والتي تبعد من البؤرة في الفرع الايمن بمقدار  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  وحدة.

(2005 - د 2)

$$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{1} = 1 \Rightarrow a^2 = 3, b^2 = 1, c = ?$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 3 + 1$$

$$c^2 = 4$$

$$c = 2$$

$$F_1(x_1, y_1) \quad P(x, y)$$

$$PF_1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2} \quad \text{بالتربيع}$$

$$\frac{1}{3} = (x-2)^2 + y^2 \quad \text{مربع حدانية}$$

$$\left[ \frac{1}{3} = x^2 - 4x + 4 + y^2 \right] \cdot 3$$

$$1 = 3x^2 - 12x + 12 + 3y^2$$

$$3x^2 + 3y^2 - 12x + 11 = 0 \quad \dots\dots\dots(1)$$

نتخلص من  $y^2$  ونجدها من معادلة القطع

$$\frac{x^2}{3} - y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = \frac{x^2}{3} - 1 \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$3x^2 + 3\left(\frac{x^2}{3} - 1\right) - 12x + 11 = 0$$

$$3x^2 + x^2 - 3 - 12x + 11 = 0$$

$$[4x^2 - 12x + 8 = 0] \div 4$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$(x-1)(x-2) = 0$$

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

$$y^2 = \frac{x^2}{3} - 1 \quad \text{عندما } x=1$$

$$y^2 = \frac{1}{3} - 1 = \frac{-2}{3} \quad \text{بُهل } \notin \mathbb{R} \quad \text{عندما } x=2$$

$$y^2 = \frac{2^2}{3} - 1 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{3} \quad \text{بالجذر}$$

$$\text{توحيد مقامات} \quad y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$P_1\left(2, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad P_2\left(2, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

استراحة شهرية

وهواك في قلب الظنون حقيقة  
لا ريب فيه وحب غيرك باطل

إن كان حبك في الفؤاد فريضة  
فسواك في شرع الغرام نوافل



$$x^2 = \frac{4}{5}y$$

$$x^2 = 4Py \Rightarrow \left[ 4P = \frac{4}{5} \right] \div 4$$

$$P = \frac{1}{5} \Rightarrow P = \frac{1}{5}$$

القطع الزائد:

$$P = c \Rightarrow c = \frac{1}{5}$$

مكافئ زائد

$$[5y^2 - 4x^2 = h] \div h$$

$$\frac{y^2}{\frac{h}{5}} - \frac{x^2}{\frac{h}{4}} = 1$$

$$a^2 = \frac{h}{5}, b^2 = \frac{h}{4}, c = \frac{1}{5}$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{h}{5} + \frac{h}{4} \quad \text{توحيد مقامات}$$

$$\frac{1}{25} = \frac{4h+5h}{20} \Rightarrow \frac{1}{25} = \frac{9h}{20}$$

$$h = \frac{20}{9 \times 25} \Rightarrow h = \frac{4}{45}$$

سؤال 20 لتكن  $x^2 - ky^2 = 3$  تمثيل معادلة قطع زائد احدي بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ  $y^2 + 8x = 0$  جد قيمه  $k$ .

2007 - د (1)

القطع المكافئ:

$$y^2 = -8x \Rightarrow [4P = 8] \div 4$$

$$P = 2$$

القطع الزائد:

$$c = P$$

مكافئ زائد

$$c = 2$$

$$[x^2 - ky^2 = 3] \div 3 \Rightarrow \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{\frac{3}{k}} = 1$$

$$a^2 = 3, b^2 = \frac{3}{k}, c = 2$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$(2)^2 = 3 + \frac{3}{k}$$

$$4 = 3 + \frac{3}{k} \Rightarrow 4 - 3 = \frac{3}{k} \Rightarrow 1 = \frac{3}{k}$$

$$k = 3$$

سؤال 21 لتكن  $5y^2 - 4x^2 = h$  معادلة قطع زائد واحد بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ  $4y - 5x^2 = 0$  جد قيمه  $h$ .

القطع المكافئ:

$$4y - 5x^2 = 0$$

$$[5x^2 = 4y] \div 5$$

$$x^2 = \frac{4}{5}y$$

2003 - د (1)



سؤال 22

قطر مكافئ معادلته  $x^2 = 10y - 3ky$  ومعادلة دليله  $y = 2k$  جد قيمة  $k$  ثم جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ اعلاه وطول محوره المرافق 2 وحدة

2017 - د (3) / تطبيقي

لوجود البؤر  $k$  هنالك احتمالين للمقارنة  $x^2 = (10 - 3k)y$

الدليل سالب  $y = -p$  المعادلة موجبة  $x^2 = 4py$  الاحتمال الأول

$$(1) \dots x^2 = 4py \rightarrow 4p = 10 - 3k \text{ بالمقارنة مع } x^2 = (10 - 3k)y$$

$$(2) \dots y = 2k \text{ بالمقارنة مع } y = -p \rightarrow -p = 2k \rightarrow p = -2k$$

$$\rightarrow k = -2 \rightarrow -5k = 10 \rightarrow -8k = 10 - 3k \text{ نعوض الثانية في الاولى}$$

$$\rightarrow p = 4 \rightarrow (0, 4) \text{ بؤرة المكافئ وبتعويض } k \text{ في الثانية}$$

أذن بؤرتي الزائد هي  $(0, 4), (0, -4)$

$$c = 4 \rightarrow c^2 = 16$$

$$b^2 = 1 \rightarrow b = 1 \rightarrow 2b = 2 \rightarrow \text{طول المحور المرافق} = 2$$

$$a^2 = 15 \rightarrow a^2 + 1 = 16 \rightarrow c^2 = a^2 + b^2$$

$$\frac{y^2}{15} - \frac{x^2}{1} = 1 \text{ معادلة القطع الزائد}$$

الدليل موجب  $y = p$  المعادلة سالبة  $x^2 = -4py$  الاحتمال الثاني

$$(1) \dots x^2 = -4py \rightarrow -4p = 10 - 3k \text{ بالمقارنة مع } x^2 = (10 - 3k)y$$

$$(2) \dots y = 2k \text{ بالمقارنة مع } y = p \rightarrow p = 2k \rightarrow p = 2k$$

$$\rightarrow k = -2 \rightarrow -5k = 10 \rightarrow -8k = 10 - 3k \text{ نعوض الثانية في الاولى}$$

وهكذا غير ممكن لأن  $P$  دائماً موجبة  $p = -4 \rightarrow$  وبتعويض  $k$  في الثانية





الأستاذ  
حيدر وليد

07701780364

المُسْنَدُ فِي  
الرِّيَاضِيَّاتِ

الهندسة الفضائية

6

2021

07702729223



ملازم دار المغرب



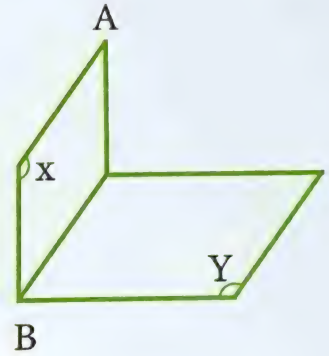
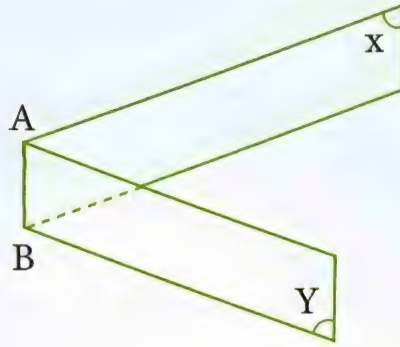
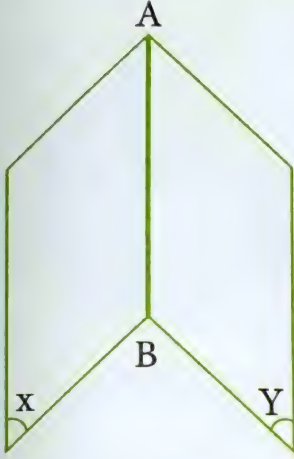
### مراجعة في الهندسة

- 1 عبارة التوازي: يمكن رسم مستقيم واحد فقط مواز لمستقيم معلوم من نقطة لا تنتهي إليه.
- 2 لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوٍ وحيد يحويهما.
- 3 لكل مستقيمين متوازيين يوجد مستوٍ وحيد يحويهما.
- 4 إذا تقاطح مستويان فإن مجموعة التقاطح مستقيم.
- 5 مستقيم تقاطح مستويين يحوي النقاط المشتركة بينهما.
- 6 إذا وازى مستقيم مستوياً فإنه يوازي جميع المستقيمتين الناتجة من تقاطح هذا المستوي مع المستويات التي تحوي هذا المستقيم.
- 7 إذا وازى مستقيم مستوي فالـمستقيم الـهـار من نقطة من نقاط المستوي موازياً للمستقيم المعلوم يكون محتوًى في المستقيم.
- 8 إذا وازى كل من مستقيمين متقاطعين مستوياً فإن مستويهما يوازي هذا المستوي.
- 9 إذا وازى ضلعاً زاوية ضلعي زاوية أخرى توازي مستويهما وتساوى قياس الزاويتين.
- 10 يتعامد المستقيمين إذا كان قياس الزاوية بينهما قائمة وبالعكس.
- 11 في المستوي الواحد: المستقيم العمودي على أحد مستقيمين توازيين يكون عمودياً على الآخر.
- 12 في المستوي الواحد: يوجد مستقيم وحيد عمودي على مستقيم معلوم من نقطة معلومة.
- 13 في الفراغ:
  - (أ) يوجد مستقيم وحيد عمودي على مستقيم معلوم من نقطة لا تنتهي إليه.
  - (ب) يوجد عدد غير منتهى من المستقيمتين العمودية على مستقيم معلوم من نقطة تنتهي إليه.
- 14 المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمتين المرسومة من اثره في ذلك المستوي وبالعكس.
- 15 المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما.
- 16 يوجد مستقيم وحيد عمودي على مستوٍ معلوم من نقطة معلومة.
- 17 المستوي العمودي على أحد مستقيمين متوازيين يكون عمودياً على الآخر.
- 18 المستقيمتين العموديات على مستوٍ واحد متوازيتان.



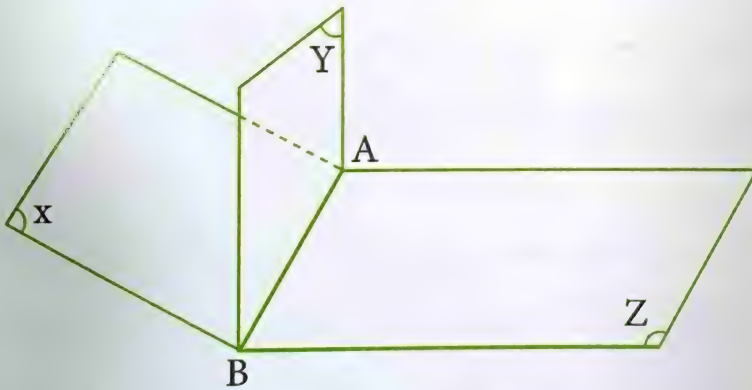
## الزاوية الزوجية والمستويات المتعامدة

**الزاوية الزوجية:** إتحاد نصفي مستويين لها حافة مشتركة .  
تسمى الحافة المشتركة بـ (حرف الزاوية الزوجية) ويسمى كل من نصفي المستويين بـ (وجه الزاوية الزوجية) كما في الشكل .



حيث  $\overleftrightarrow{AB}$  هو حرف الزاوية الزوجية و هما وجهها ويعبر عن الزاوية الزوجية بالتعبير:  
 $(x) - \overleftrightarrow{AB} - (Y)$

وقد يعبر عنها بحرف الزاوية الزوجية إن لم يكن مشتركاً مع زاوية أخرى .  
مثلاً:



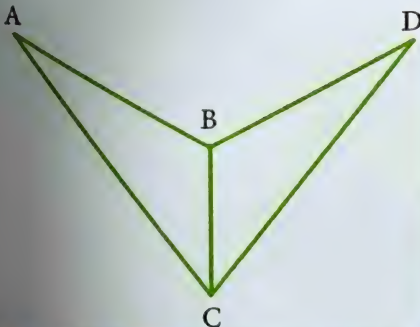
الزاوية الزوجية

$$(x) - \overleftrightarrow{AB} - (Z)$$

$$(x) - \overleftrightarrow{AB} - (Y)$$

$$(Y) - \overleftrightarrow{AB} - (Z)$$

ولا يمكن أن تكتب الزاوية الزوجية بشكل  $\overleftrightarrow{AB}$  في هذا المثال لأن الحرف  $\overleftrightarrow{AB}$  مشترك في أكثر من زاوية زوجية .



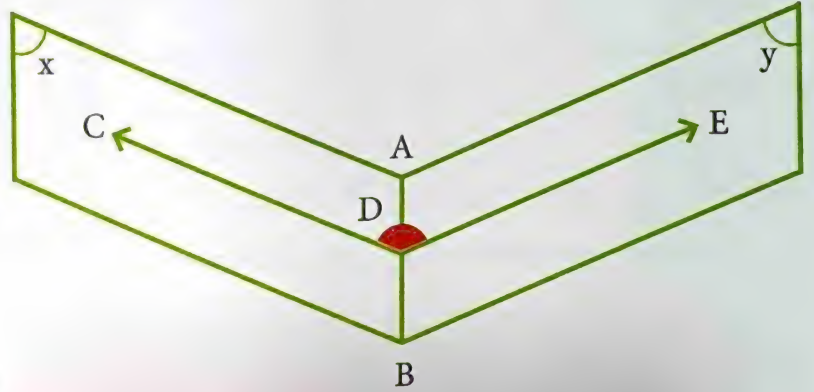
عندما تكون أربع نقاط ليست في مستوي واحد . نكتب الزاوية الزوجية  $A - \overleftrightarrow{BC} - D$  أو الزاوية الزوجية بين المستويين  $(ABC)$  ,  $(DBC)$  كما في الشكل الآتي :

ملاحظة



وتقاس الزاوية الزوجية كالآتي :

نأخذ نقطة D على الحافة المشتركة ونرسم من D العمود في (x) والعمود في (y) على الحرف فيكون قياس الزاوية الزوجية بين المستويين هو قياس الزاوية CDE وتسمى الزاوية العائدة للزاوية الزوجية كما في الشكل الآتي :



بعبارة اخرى لدينا الزاوية الزوجية

$$(x) - \overleftrightarrow{AB} - (Y)$$

ولدينا

$$\overrightarrow{DC} \subset (x) , \overrightarrow{DE} \subset (Y)$$

$$DC \perp \overleftrightarrow{AB} , DE \perp \overleftrightarrow{AB}$$

$\therefore \angle CDE$  هي الزاوية المستوية العائدة للزاوية الزوجية

$$\overleftrightarrow{AB} \text{ أو } (x) - \overleftrightarrow{AB} - (Y)$$

**الزاوية المستوية العائدة لزاوية زوجية :**

هي الزاوية التي ضلعها عموديات على حرف الزاوية الزوجية من نقطة تنتهي اليه وكل منها في أحد وجهي الزاوية الزوجية .

1 قياس زاوية عائدة لزاوية زوجية ثابت .

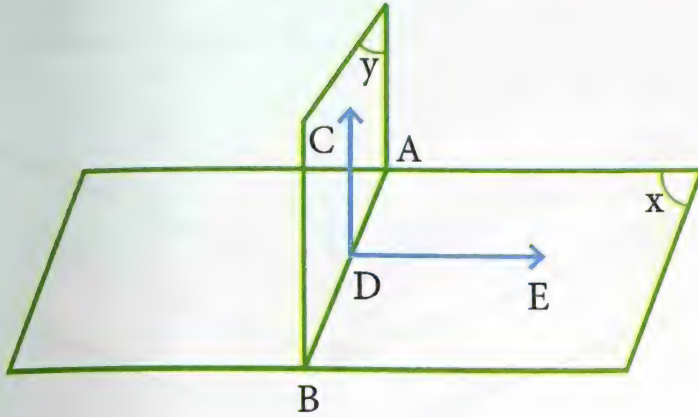
2 قياس الزاوية الزوجية يساوي قياس الزاوية العائدة لها وبالعكس .

إذا كانت الزاوية الزوجية قائمة فإن المستويين متعامدان وبالعكس .

$$(x) \perp (Y) \leftrightarrow (x) - \overleftrightarrow{AB} - (Y) = 90^\circ \text{ قياس}$$



**مبرهنة (7)** إذا تعامد مستويات فالمستقيم الهرسوم في أحدهما والعمودي على مستقيم التقاطع يكون عمودياً على المستوي الآخر.



معطيات  $(Y) \perp (x)$

$\overrightarrow{CD} \subseteq (Y)$

$(Y) \cap (x) = \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{AB}$

مطلوب اثباته  $\overrightarrow{CD} \perp (x)$

البرهان:

في (x) نرسم  $\overrightarrow{DE} \perp \overrightarrow{AB}$  (في المستوي الواحد يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستقيم فيه معلوم من نقطة معلومة).

(معطى)  $\overrightarrow{CD} \subseteq (Y), \overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{AB}$

$\therefore \angle CDE$  عائدة للزاوية الزوجية  $(x) - \overrightarrow{AB} - (Y)$  (تعريف الزاوية العائدة)

$\therefore \angle CDE = 90^\circ$  (قياس الزاوية الزوجية يساوي قياس الزاوية العائدة لها وبالعكس).

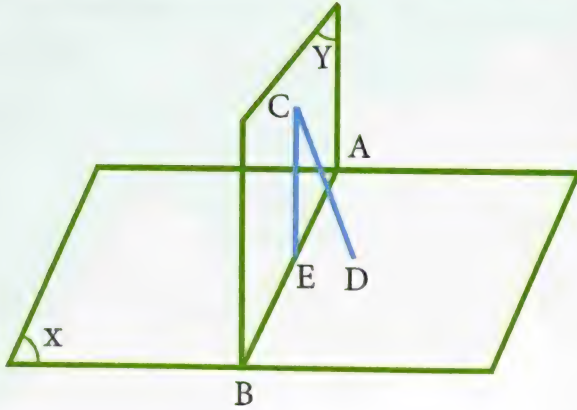
$\therefore \overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{DE}$  (إذا كان قياس الزاوية بين مستقيمين 90 فإن المستقيمين متعامدان وبالعكس).

$\therefore \overrightarrow{CD} \perp (x)$  (المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعها يكون عمودياً على مستويهما).

و.ه.م



**نتيجة مبرهنة (7)** إذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم من نقطة في أحدهما عمودياً على المستوي الآخر يكون محتوي فيه .



المعطيات /  $(Y) \perp (X)$

$C \in (Y)$

$CD \perp (X)$

$\overline{CD} \subset (Y)$  م / اثباته

البرهان :  $(x) \cap (Y) = \overline{AB}$

(يتقاطع مستويان بخط مستقيم)

نرسم  $\overline{CE} \subset (Y)$

بحيث  $\overline{CE} \perp \overline{AB}$  (في المستوي واحد يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على المستقيم معلوم من نقطة معلومة) .

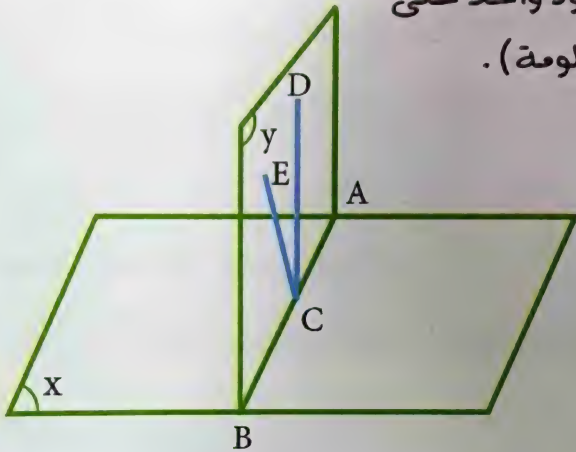
(معطى)  $(Y) \perp (x)$

**مبرهنة (7)**  $\overline{CE} \perp (x)$

(إذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم في أحدهما وعمودي على مستقيم التقاطع يكون عمودي على المستوي الآخر) .

(معطى)  $\overline{CD} \perp (x)$

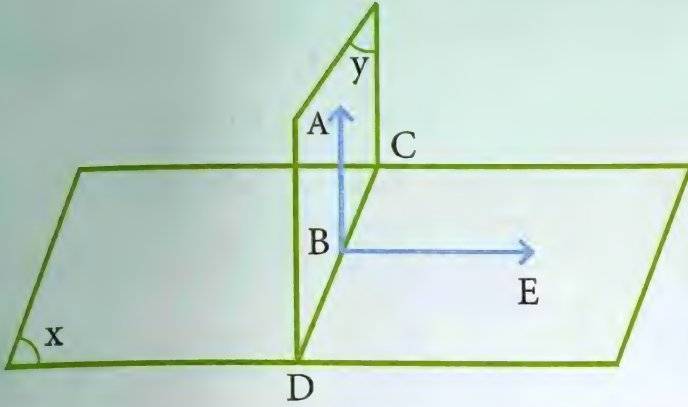
$\therefore \overline{CE} = \overline{CD}$  (لا يمكن رسم أكثر من عمود واحد على مستوي معلوم من نقطة معلومة) .



أو  
يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستقيم معلوم من نقطة معلومة .



**مبرهنة 8:** كل مستويين متوازيين وعمودي على مستوي آخر يكون عمودياً على ذلك المستوي أو يتعامد المستويان إذا احتوى أحدهما على مستقيم عمودي على الآخر.



المعطيات /  $\overrightarrow{AB} \perp (x)$

$\overrightarrow{AB} \subset (y)$

المطلوب إثباته:  $(y) \perp (x)$

البرهان:

ليكن  $\overrightarrow{CD} = (x) \cap (y)$  (يتقاطع المستويان بخط مستقيم).

$B \in \overrightarrow{CD}$  (مستقيم التقاطع يحتوي النقاط المشتركة).

في (x) نرسم  $\overrightarrow{BE} \perp \overrightarrow{CD}$  (في المستوي الواحد يوجد مستقيم وحيد عمودي على مستقيم معلوم من نقطة معلومة).

$\therefore \overrightarrow{AB} \perp (x)$  (معطى)

$\therefore \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{BE} \perp \overrightarrow{CD}$  (المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوي).

$\therefore \overrightarrow{AB} \subset (y)$  (معطى)

$\therefore \angle ABE$  عائدة للزاوية الزوجية  $\overrightarrow{CD}$  (تعريف الزاوية العائدة).

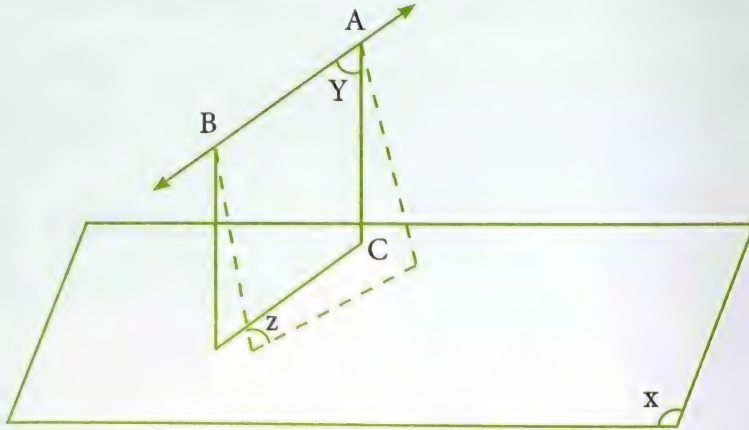
$m \angle ABE = 90^\circ$  (لأن  $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BE}$ )

$\therefore$  قياس الزاوية الزوجية  $\overrightarrow{CD} - (x) = 90^\circ$  (قياس الزاوية الزوجية يساوي قياس الزاوية العائدة لها وبالعكس).

$\therefore (y) \perp (x)$  (إذا كان قياس الزاوية الزوجية  $90^\circ$  فإن المستويين متعامدان وبالعكس).



**مبرهنة 9:** من مستقيم غير عمودي على مستوي معلوم يوجد مستوي وحيد عمودي على المستوي المعلوم.



المعطيات:

$\overline{AB}$  غير عمودي على (x)  
المطلوب اثباته.

إيجاد مستوي وحيد يحوي  $\overline{AB}$  وعمودي على (x).

البرهان: من نقطة (A) نرسم  $\overline{AC} \perp (x)$  (يوجد مستقيم وحيد عمودي على مستوي معلوم من نقطة لا تنتهي إليه).

$\therefore \overline{AB}, \overline{AC}$  متقاطعان.

$\therefore$  يوجد مستوي وحيد مثل (Y) يحويهما (لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوي وحيد تحويهما).

$\therefore (Y) \perp (x)$  (مبرهنة 8)

**ولبرهنة الوحداية** ليكن (Z) مستوي آخر يحوي  $\overline{AB}$  وعمودي على (X).

$\therefore \overline{AC} \perp (x)$  (بالبرهان)

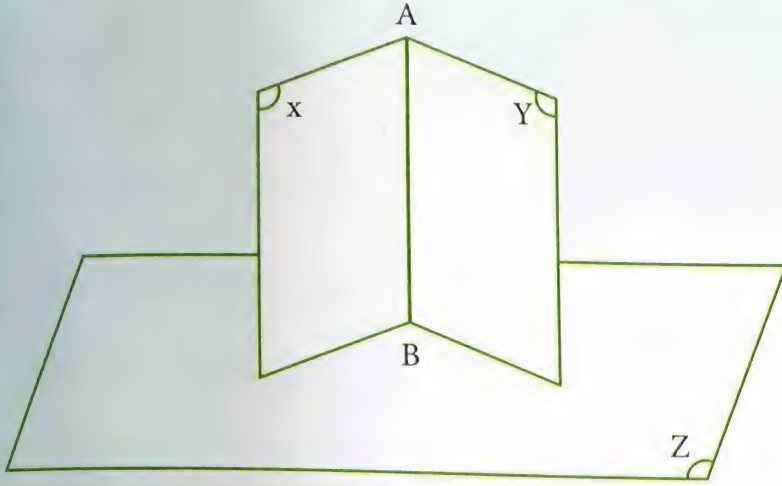
$\therefore \overline{AC} \subset (Z)$  (نتيجة مبرهنة 7)

$\therefore (Y) = (Z)$  (لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوي وحيد يحويهما)

(Y) وحيد



**نتيجة مبرهنة (9):** إذا كان كل من مستويين متقاطعين عمودياً على مستوي ثالث فإن مستقيم تقاطعها يكون عمودياً على المستوي الثالث.



المعطيات:

$$(x) \cap (y) = \overrightarrow{AB}$$

$$(x), (y) \perp (Z)$$

المطلوب اثباته:

$$\overrightarrow{AB} \perp (Z)$$

البرهان:

إن لم يكن  $\overrightarrow{AB}$  عمودياً على  $(Z)$

لها وجد أكثر من مستوي يحوي  $\overrightarrow{AB}$  وعمودي على  $(Z)$  (مبرهنة 9)

$$\overrightarrow{AB} \perp (Z)$$

٩. ه. م

**تحذير هام جداً**  
أن مطبعة المغرب (ملازم دار المغرب) هي دار نشر قانونية مثبتة لدى وزارة الصناعة، وعليه نحذر من عملية التلاعب بطباعة مؤلفاتنا واستنساخها أو نشرها على الانترنت، فهناك عقوبات بحق هذا التجاوز والتعدي على طباعتنا وجهدنا وفق القانون العراقي المرقم ٢١ لسنة ١٩٥٧ والمعدل برقم ٨٠ في سنة ٢٠٠٤ وللمحكمة حق مصادرة المنتجات المخالفة والبضائع وعنوان المكتبة ووسائل التغليف والأوراق، وتذكر أن كل ما بين يديك هو جهد وإجتهد شخصي من الاستاذ والمطبعة وفق الإتفاق المبرم، وعليه لا نخول شرعاً وقانوناً استنساخ أو نشر الملزمة أو أي جزء منها. لذا اقتضى التنويه والتحذير



تمارين (1-6)

س1 : برهن إن مستوى الزاوية المستوية العائدة لزاوية زوجية يكون عمودياً على حرفها.  
الحل:

المعطيات:

(C D E) زاوية عائدة للزاوية الزوجية

$$(x) - \overline{AB} - (Y)$$

المطلوب:  $(C D E) \perp \overline{AB}$

البرهان:  $\overline{CD} \perp \overline{AB}$

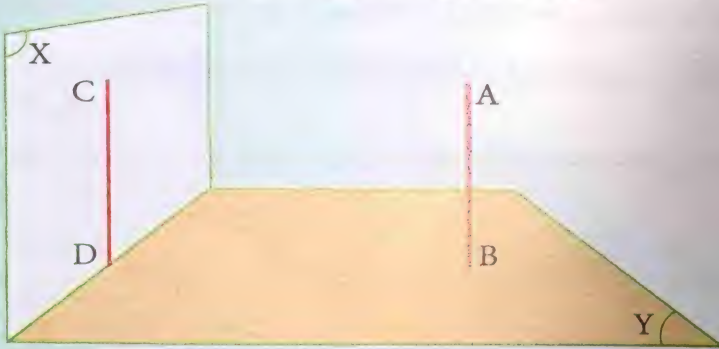
[تعريف الزاوية العائدة]

$$\overline{ED} \perp \overline{AB}$$

$$(C D E) \perp \overline{AB}$$

(المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعها يكون عمودياً على مستوييهما).  
و. ه. ٢٠

س2: برهن إنه إذا وازى مستقيم مستوياً وكان عمودياً على مستوى آخر فأن المستويين متعامدان.



الحل:  $\overline{AB} \parallel (x)$

المعطيات:  $\overline{AB} \perp (Y)$

المطلوب:  $(x) \perp (Y)$

البرهان: لتكن  $C \in (x)$

فرسم  $\overline{CD} \perp (Y)$

(يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستوي معلوم من نقطة معلومة)

$$\therefore \overline{AB} \perp (Y) \text{ (معطى)} \rightarrow \overline{AB} \parallel \overline{CD}$$

$$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$$

المستقيمان العموديان على مستوي واحد متوازيان).

$$C \in (x) \rightarrow \overline{CD} \subset (x)$$

(إذا وازى مستقيم مستوياً فالمستقيم المفهوم من نقطة في المستوي وموزياً للمستقيم المعلوم يكون محتوي في المستوي).

(مبرهنة 8)  $(x) \perp (Y)$

و. ه. ٢٠



س3: برهن إن المستوي العمودي على أحد مستويين يكون عمودياً على الآخر أيضاً.  
الحل:

المعطيات:  $(x) \parallel (Y)$  ,  $(Z) \perp (x)$

المطلوب:  $(Z) \perp (Y)$

البرهان: ليكن  $(Z) \cap (x) = \overline{AB}$

(إذا تقاطع مستويان فإن مجموعة التقاطع مستقيم)

لتكن  $C \in Z$  ، نرسم  $\overline{CD} \subset (Z)$  بحيث  $\overline{CD} \perp \overline{AB}$

(في المستوي الواحد: يمكن رسم مستقيم واحد فقط

عمودي على مستقيم معلوم من نقطة معلومة).

(مبرهنة 7)  $(Z) \perp (x) \rightarrow \overline{CD} \perp (x)$  (معطى)

$(x) \parallel (Y) \rightarrow \overline{CD} \perp (Y)$  (معطى)

(المستقيم العمودي على أحد مستويين متوازيين يكون عمودياً على الآخر)

$\therefore (Z) \perp (Y)$  (مبرهنة 8)

و. ه. م.

س4: أربع نقاط ليست في مستوي واحد بحيث  $AB = AC$  ,  $E \in \overline{BC}$  فإذا

كانت  $\angle AED$  عائدة للزاوية الزوجية  $A - \overline{BC} - D$  برهن ان  $CD = BD$

الحل

المعطيات:  $A, B, C, D$  أربع نقاط ليست في مستوي واحد.

$E \in \overline{BC}$  ,  $AB = AC$

$\angle AED$  عائدة للزاوية الزوجية  $A - \overline{BC} - D$

المطلوب:  $CD = BD$

البرهان: في  $\triangle ABC$   $AB = AC$  (معطى)

$\therefore \overline{AE} \perp \overline{BC}$  (تعريف العائدة)

$\therefore E$  منتصف  $\overline{BC}$

(العمود لهرسوم من رأس مثلث متساوي الساقين على القاعدة ينصفها).

في المثلثين  $CED, BED$

$\overline{DE}$  (مشارك)

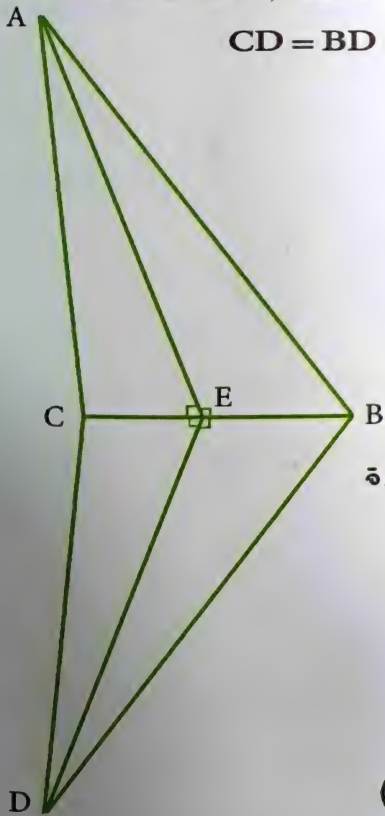
$CE = BE$  (بالبرهان)

$\angle CED = \angle BED$  (قوائم (تعريف العائدة)

يتطابق المثلثان (لتساوي ضلعين والزاوية المحصورة بينهما)

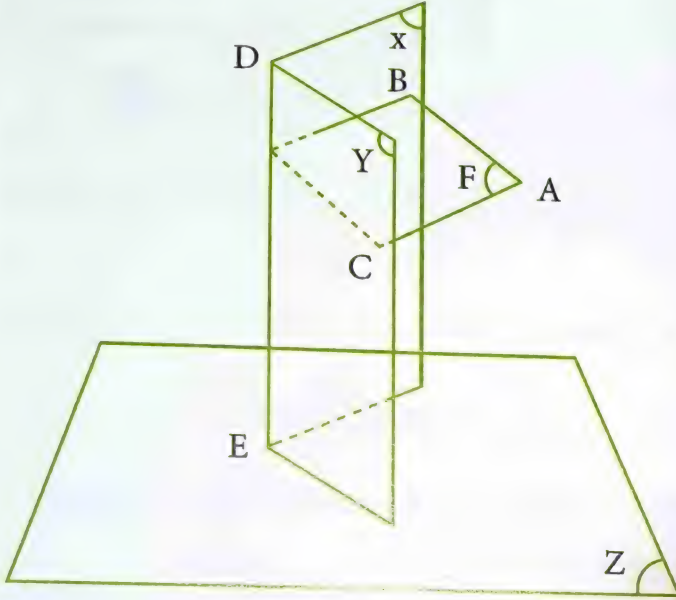
وينتج  $CD = BD$

و. ه. م.





س5: برهن إذا وازى كل من مستقيمين متقاطعين مستوياً معلوماً وكانا عمودين على مستويين متقاطعين فإن مستقيم تقاطع المستويين المتقاطعين يكون عمودياً على المستوي المعلوم.



الحل:

المعطيات:  $\overline{AB}, \overline{AC} \parallel (Z)$

$\overline{AB} \perp (x), \overline{AC} \perp (Y), (x) \cap (Y) = \overline{DE}$

المطلوب:  $\overline{DE} \perp (Z)$

البرهان:  $\overline{AB}, \overline{AC}$  متقاطعان

يوجد مستوي وحيد يحويهما مثل (F) (لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوي وحيد يحويهما).

$\therefore (F) \parallel (Z)$

(إذا وازى كل من مستقيمين متقاطعين مستوياً فإن مستويهما يوازي ذلك المستوي)

مبرهنة 8  $\therefore \overline{AB} \perp (x) \text{ (معطى)} \rightarrow (F) \perp (x)$

مبرهنة 8  $\therefore \overline{AC} \perp (Y) \text{ (معطى)} \rightarrow (F) \perp (Y)$

نتيجة مبرهنة 9  $\therefore \overline{DE} \perp (F)$

(المستقيم العمودي على أحد مستويين متوازيين  $\overline{DE} \perp (Z)$  يكون عمودياً على الآخر).

و. ه. و



س6: دائرة قطرها عمودي على مستويها، D نقطة تنتمي للدائرة، برهن إن (CDB) (CDA).

الحل:

المعطيات: دائرة قطرها  $\overline{AB}$

$\overline{AC}$  عمودي على مستويها، D نقطة تنتمي للدائرة.

المطلوب:  $(CDA) \perp (CDB)$

البرهان:  $\therefore \overline{AB}$  قطر الدائرة (معطى)

$$m \angle ADB = 90^\circ$$

(الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة قائمة)

$\therefore \overline{AC} \perp (ADB)$  (معطى)

$\overline{AD} \perp \overline{DB}$  بالبرهان

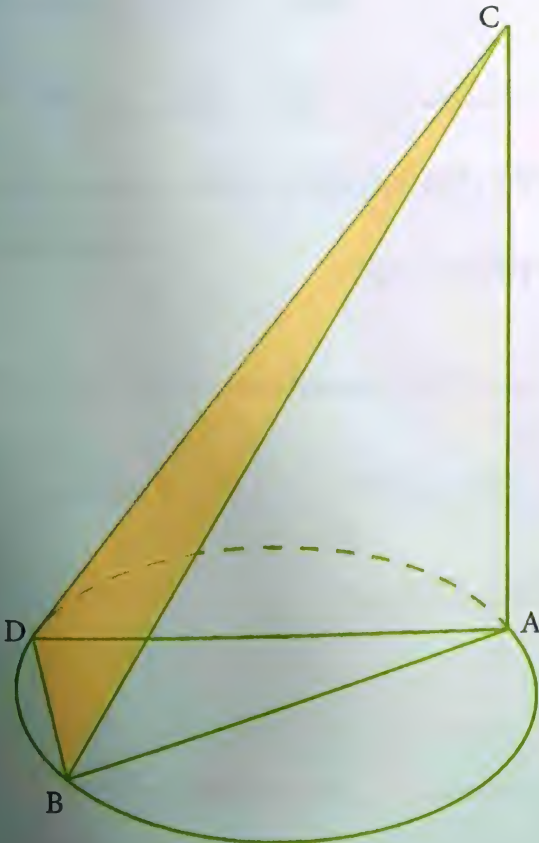
مبرهنة الاعمدة الثلاثة  $\overline{CD} \perp \overline{DB}$

$\therefore \overline{DB} \perp (CDA)$

(المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من

نقطة تقاطعها يكون عمودياً على مستويها).

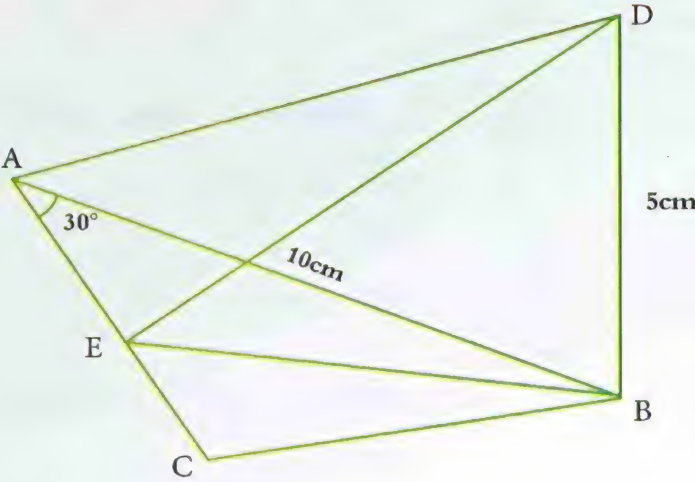
$\therefore (CDA) \perp (CDB)$  (مبرهنة 8)



٢٠٥٠



مثال (1)



في  $\triangle ABC$

$$\overline{BD} \perp (ABC), m \angle A = 30^\circ$$

$$AB = 10\text{cm}, BD = 5\text{cm}$$

جد قياس الزاوية الزوجية

$$D - \overline{AC} - B$$

المعطيات

$$AB = 10\text{cm}, BD = 5\text{cm}$$

$$\overline{BD} \perp (ABC), m \angle BAC = 30^\circ$$

المطلوب اثباته:

$$D - \overline{AC} - B \quad \text{إيجاد قياس الزاوية الزوجية}$$

في المستوي (ABC) نرسم  $\overline{BD} \perp \overline{AC}$  في نقطة E (في المستوي الواحد يوجد مستقيم وحيد عمودي على مستقيم معلوم من نقطة معلومة).

$$\therefore \overline{BD} \perp (ABC) \quad (\text{معطى})$$

$$\therefore \overline{DE} \perp \overline{AC} \quad (\text{مبرهنة الاعمدة الثلاثة})$$

$$\angle DEB \text{ عائدة للزاوية الزوجية } \overline{AC} \quad (\text{تعريف الزاوية العائدة})$$

$\overline{DB} \perp \overline{BE}$  (المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من اثره ضمن ذلك المستوي).

$$\triangle DBE \quad \text{قائم الزاوية في B}$$

$$\triangle BED \quad \text{القائم الزاوية في E}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{BE}{BA} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BE}{10} \rightarrow BE = 5\text{cm}$$

$$\triangle DBE \quad \text{القائم الزاوية في B}$$

$$\therefore \text{قياس } \angle BED = \frac{5}{5} = 1 \rightarrow m \angle BED = 45^\circ$$

$\therefore$  قياس الزاوية الزوجية  $D - \overline{AC} - B = 45^\circ$  (قياس الزاوية الزوجية هو قياس الزاوية العائدة لها وبالعكس).

و. ه. و



### مثال (2)



لیکن ABC مثلثاً ولیکن

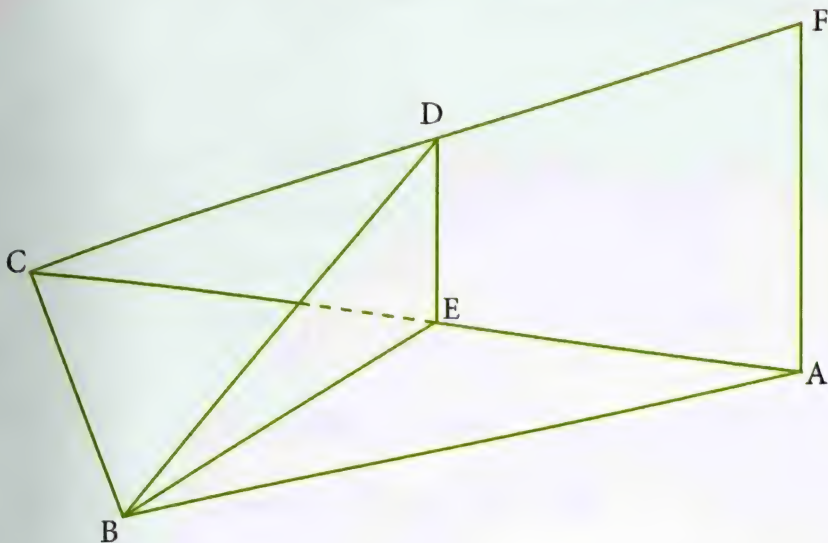
$$\overline{AF} \perp (ABC)$$

$$\overline{BD} \perp \overline{CF}$$

$$\overline{BE} \perp \overline{CA}$$

برهن أن  $\overline{BE} \perp (CDE)$

$$\overline{ED} \perp \overline{CF}$$



$\overline{AF} \perp (ABC), \overline{BE} \perp \overline{AC}, \overline{BD} \perp \overline{CF}$       البعطات

المطلوب إثباته:  $\overline{DE} \perp \overline{CF}, \overline{BE} \perp (CAF)$

البرهان:  $\overline{AF} \perp (ABC) \therefore$  (معطى)

$\therefore (ABC) \perp (CAF)$  (مبرهنة 8: يتعامد المستويان إذا احتوى أحدهما

على مستقيم عهدى على الآخر).

$$\overline{BE} \perp \overline{AC} \therefore \text{(مطبی)}$$

∴  $\overline{BE} \perp (CAF)$  (مبرهنة 7): إذا تحامد مستويان فالمتقييم المرسوم

في أحدهما والعمودي على مستقيم التقاطع يكون عمودياً على الآخر).

$$\overline{BD} \perp \overline{CF} \quad (\text{معطى})$$

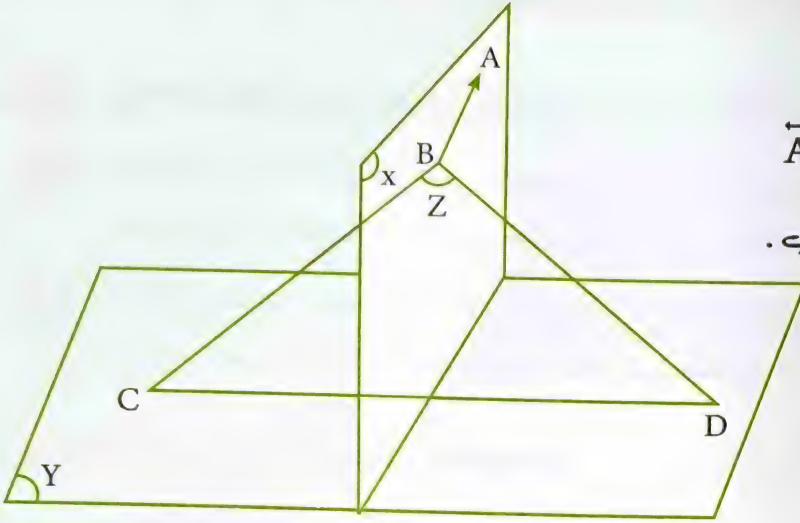
نتيجة مبرهنة الأعمدة الثلاثة  $\overline{ED} \perp \overline{CF}$

۹. ۵. ۴



مستويات متعامدان (y) , (x)

مثال (3)



$$\overrightarrow{AB} \subset (x)$$

$\overrightarrow{BC}$  ,  $\overrightarrow{BD}$  عموديان على  $\overrightarrow{AB}$

ويقطعان (Y) في C, D على الترتيب .

برهن ان:  $\overrightarrow{CD} \perp (x)$

المعطيات:  $(x) \perp (Y)$  ,  $\overrightarrow{AB} \subset (x)$  ,  $\overrightarrow{BC}$  ,  $\overrightarrow{BD}$  عمودي على  $\overrightarrow{AB}$  ويقطعان (Y) في C , D على الترتيب .

المطلوب اثباته:  $\overrightarrow{CD} \perp (x)$

البرهان: ليكن (Z) مستوي المستقيمين المتقاطعين  $\overrightarrow{BC}$  ,  $\overrightarrow{BD}$  (لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوي واحد يحويهما).

بها ان  $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$  ,  $\overrightarrow{BD}$  (معطى)

$$\therefore \overrightarrow{AB} \perp (Z)$$

(المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعها يكون عمودياً على مستويهما)

$$\therefore \overrightarrow{AB} \subset (x) \text{ (معطى)}$$

$\therefore (x) \perp (Z)$  (يتعامد المستويان إذا احتوى أحدهما على مستقيم عمودي على الآخر).

$$\therefore (x) \perp (Y) \text{ (معطى)}$$

ولها ان  $\overrightarrow{CD} \subset (Y \cap Z)$  (لانه محتوي في كل منهما).

$$\therefore \overrightarrow{CD} \perp (x)$$

(إذا كان كل من مستويين متقاطعين عمودياً على مستوي ثالث فإن مستقيمي تقاطعها يكون عمودياً على المستوي الثالث).

٩٠ هـ

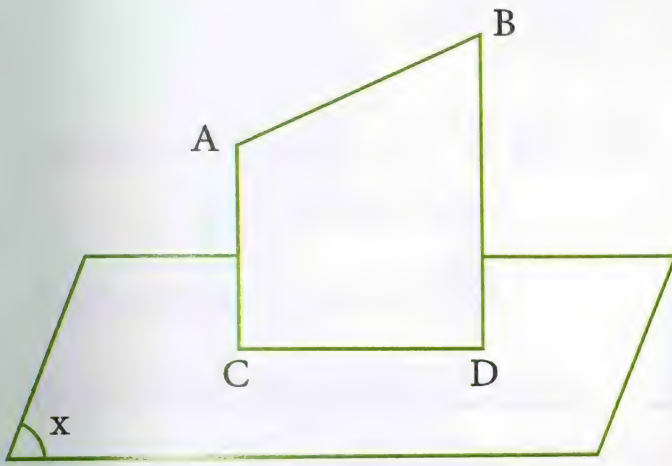


الاسقاط العمودي على مستوي

1 مسقط نقطة على مستوي: هو أثر العمود المرسوم من تلك النقطة على المستوي .

2 مسقط مجموعة نقط على مستوي: لتكن  $L$  مجموعة من نقاط في الفراغ فإن مسقطها هو مجموعة كل أثار الأعمدة المرسومة من نقاطه على المستوي .

3 مسقط قطعة مستقيم غير عمودية على مستوي معلوم: هو قطعة المستقيم المحدودة بأثري العمودين المرسومين من نهايتي القطعة على المستوي المعلوم .



ليكن  $AB$  غير عمودي على  $(x)$  وليكن

$\overline{AC} \perp (x)$  ← مسقط  $A$  على  $(x)$  هو  $C$

$\overline{BD} \perp (x)$  ← مسقط  $B$  على  $(x)$  هو  $D$

∴ مسقط  $\overline{AB}$  على  $(x)$  هو  $\overline{CD}$

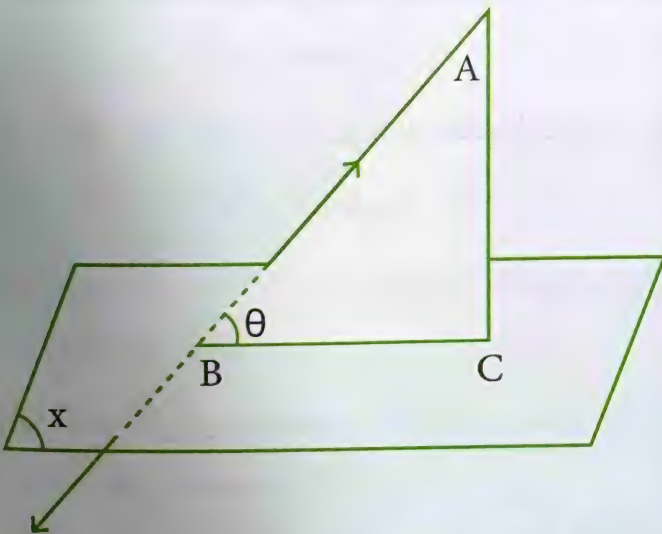
ملاحظة

إذا كان  $\overline{AB} \parallel (x)$

فإن  $AB = CD$

4 المستقيم المائل على مستوي: هو المستقيم غير العمودي على المستوي وقاطع له .

5 زاوية الميل: هي الزاوية المحدودة بالمائل ومسقطه على المستوي .



ليكن  $\overline{AB}$  مائلاً على  $(x)$  في  $B$

وليكن  $\overline{AC} \perp (x)$  في  $C$

∴  $C$  مسقط  $A$  على  $(x)$  حيث  $A \notin (x)$

كذلك  $B$  مسقط نفسها حيث  $B \in (x)$

←  $\overline{BC}$  مسقط  $\overline{AB}$  على  $(x)$

أي إن  $0 < \theta < 90^\circ$

$\theta \in (0, 90^\circ)$



6 طول المسقط: طول نسقط قطعة مستقيم على مستوي = طول المائل  $\times$  جيب تمام زاوية الميل.

ف عندما تكون  $\overline{AB}$  مائلاً على  $(x)$  وزاوية ميله  $\theta$  ومسقطه  $\overline{BC}$  فإن  $BC = AB \cos \theta$  مسقط مستوي مائل على  $(x)$ :

7 زاوية ميل مستوي معلوم هو قياس الزاوية المستوية العائدة للزاوية الزوجية بينها مساحة مسقط منطقة مائلة على مستوي معلوم = مساحة المنطقة المائلة  $\times$  جيب تمام زاوية الميل لتكن:

$A' = A \cos \theta$  مساحة المنطقة المائلة، مساحة المسقط، قياس زاوية الميل

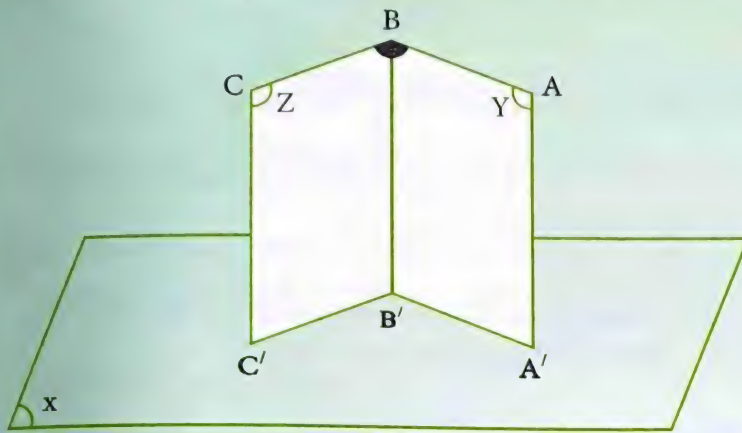
## الرياضيات

تحذير هام جداً  
أن مطبعة المغرب (ملازم دار المغرب) هي دار نشر قانونية مثبتة لدى وزارة الصناعة، وعليه نحذر من عملية التلاعب بطباعة مؤلفاتنا واستنساخها أو نشرها على الأنترنت، فهناك عقوبات بحق هذا التجاوز والتعدي على طباعتنا وجهدنا وفق القانون العراقي المرقم ٢١ لسنة ١٩٥٧ والمعدل برقم ٨٠ في سنة ٢٠٠٤ وللمحكمة حق مصادرة المنتجات المخالفة والبضائع وعنوان المكتبة ووسائل التغليف والأوراق، وتذكر أن كل ما بين يديك هو جهد واجتهاد شخصي من الاستاذ والمطبعة وفق الإتفاق المبرم، وعليه لا نخول شرعاً وقانوناً استنساخ أو نشر الملزمة أو أي جزء منها. لذا اقتضى التنويه والتحذير



مثال (4)

إذا وازى احد ضلعي زاوية قائمة مستوياً فأن مسقطي ضلعيها على المستوي متعامدان .



المعطيات:  $\triangle ABC$  قائمة في B

$$AB \parallel (x)$$

$A'B'$  هو مسقط  $AB$  على  $(x)$

$B'C'$  هو مسقط  $BC$  على  $(x)$

المطلوب اثباته:  $A'B' \perp B'C'$

البرهان:  $\begin{cases} AB \text{ مسقط } A'B' \\ BC \text{ مسقط } B'C' \end{cases}$  معطى

(مسقط قطعة مستقيم على مستوي معلوم هو القطعة المحددة بأثري العمودين المرسومين على المستوي من طرفي القطعة المستقيمة).

(المستقيمان العموديان على مستوي واحد متوازيان).

بالمستقيمين المتوازيين  $AA'$ ,  $BB'$  نعين  $(Y)$  (لكل مستقيمين متوازيين يوجد بالمستقيمين المتوازيين  $BB'$ ,  $CC'$  نعين  $(Z)$  مستوي وحيد يحويهما).

لكن  $AB \parallel (x)$  (معطى)

(يتقاطع مستويان بخط مستقيم).  $(Y) \cap (x) = A'B'$

(إذا وازى مستقيم مستوياً معلوماً فإنه يوازي جميع المستقيمان  $AB \parallel A'B'$

الناجمة من تقاطع هذا المستوي والمستويات التي تحوي المستقيم).

كذلك  $BB' \perp A'B'$  (المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع

المستقيبات المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوي).

(في المستوي الواحد: المستقيم العمودي على أحد مستقيمين

متوازيين يكون عمودياً على الآخر).

لكن  $AB \perp BC$  (لأن  $\angle ABC = 90^\circ$  معطى)

(المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعها  $AB \perp (Z)$

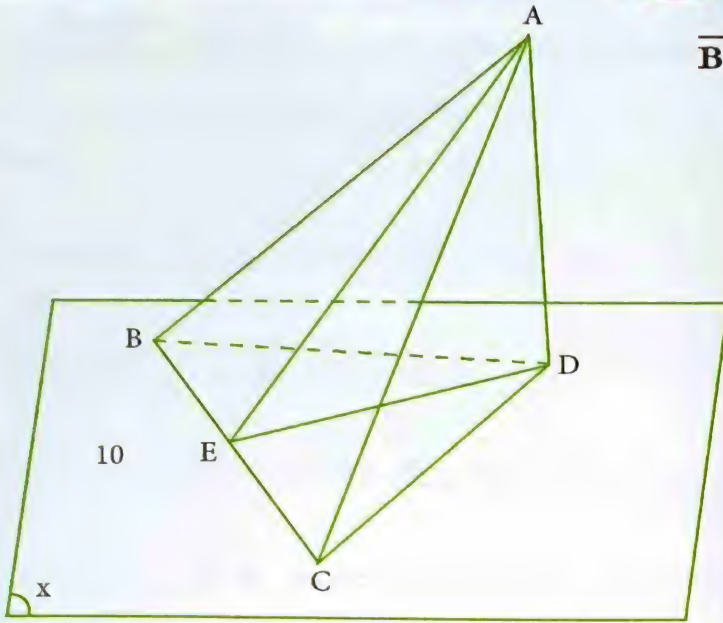
يكون عمودياً على مستويهما).

(المستوي العمودي على أحد مستقيمين متوازيين يكون عمودياً على الآخر).  $A'B' \perp (Z)$

$\therefore A'B' \perp B'C'$  (المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيبات

المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوي).





مثال (5)  $\overline{BC} \subset (x)$  مثلث ABC

والزاوية الزوجية بين مستوي الهثلث

ABC والمستوي (x)

قياسها  $60^\circ$  فإذا كان:

$$AB = AC = 13\text{cm}, BC = 10\text{cm}$$

جد مسقط الهثلث (ABC) على (x)

ثم جد مساحة مسقط  $\triangle ABC$  على (x)

المعطيات:  $\triangle ABC, \overline{BC} \subset (x)$

$$M \angle \triangle ABC - BC - (x) = 60^\circ$$

$$AB = AC = 13, BC = 10$$

المطلوب إثباته: إيجاد مسقط  $\triangle ABC$  على (x) وإيجاد مساحة مسقط  $\triangle ABC$  على (x).

البرهان: نرسم  $\overline{AD} \perp (x)$  في D (يمكن رسم عمود على مستوي من نقطة معلومة).

(مسقط قطعة مستقيم على مستوي معلوم هو القطعة المحدودة بأثري العمودين المرسومين على المستوي من طرفي القطعة المستقيمة).

$\triangle BCD$  مسقط  $\triangle ABC$  على (x).

من (ABC) نرسم  $\overline{BC} \perp \overline{AE}$  في E (في المستوي الواحد يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستقيم معلوم من نقطة معلومة).

وبما إن  $AC = AB$  (معطى)

$$\therefore EC = BE = 5\text{cm} \quad (\text{العمود النازل من رأس مثلث متساوي الساقين على القاعدة ينصفها}).$$

$$\therefore \overline{ED} \perp \overline{BC} \quad (\text{نتيجة مبرهنة الأعمدة الثلاثة}).$$

$$\therefore \angle DEA \text{ عائدة للزوجية } \overline{BC} \text{ (تعريف الزاوية العائدة)}.$$

لكن قياس الزاوية الزوجية  $\overline{BC} = 60^\circ$  (معطى)

في  $\triangle AEB$  القائم في E

في  $\triangle AED$  القائم في D

$$AE = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12\text{ cm}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{BD}{AE} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{ED}{12} \rightarrow ED = 6\text{cm}$$

$$\text{مساحة الهثلث } BCD = \frac{1}{2} \times 10 \times 6 = 30\text{ cm}^2$$

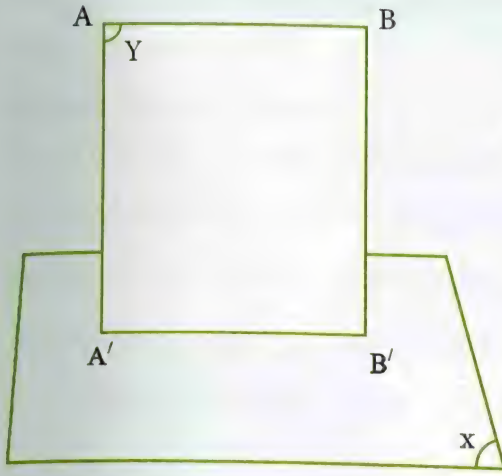


1

سؤال

برهن أن طول قطعة المستقيم الموازي لمستوي معلوم يساوي طول مسقطه على المستوي المعلوم وبوازيه .

الحل



المعطيات:  $\overline{A'B'}$  هو مسقط  $\overline{AB}$  على  $(x)$  ,  $\overline{AB} \parallel (x)$

المطلوب:  $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$  ,  $\overline{AB} = \overline{A'B'}$

البرهان:  $\overline{A'B'}$  هو مسقط  $\overline{AB}$  على  $(x)$  معطى

$\therefore \overline{AA'}$  ,  $\overline{B'B'}$  عمودان على  $(x)$  (تعريف المسقط)

$$\therefore \overline{AA'} \parallel \overline{BB'}$$

(المستقيمان العموديان على مستوي واحد متوازيان)

نعين المستوي  $(Y)$  بالمستقيمين المتوازيين  $\overline{AA'}$  ,  $\overline{BB'}$   $\therefore$

(لكل مستقيمين متوازيين يوجد مستوي وحيد يحويهما)

(معطى)  $\therefore \overline{AB} \parallel (x)$

$$\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$$

(إذا وازى مستقيم مستوياً فإنه يوازي جميع المستقيمان الناتجة من تقاطع هذا المستوي مع المستويات التي تحوي هذا المستقيم).

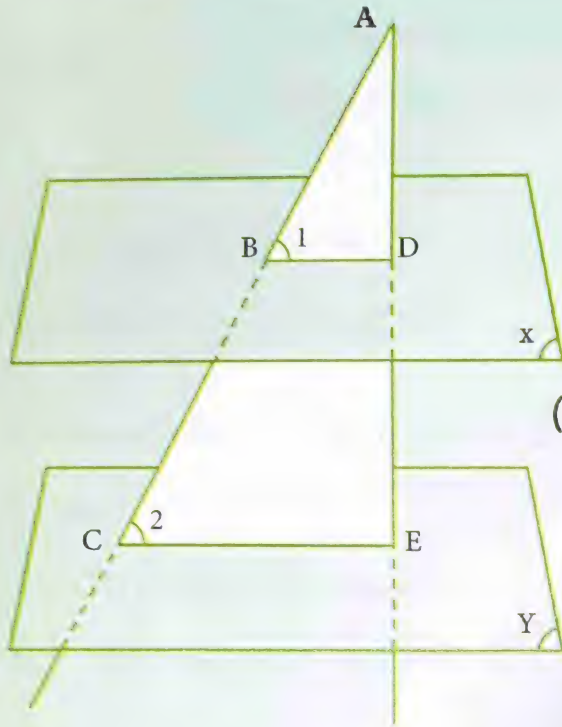
$\therefore \overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$  متوازي أضلاع (لتوازي كل ضلعين متقاطعين فيه)

(يتساوى طول الضلعين المتقابلين في متوازي الأضلاع)  $\therefore \overline{AB} = \overline{A'B'}$



سؤال 2 برهن إن قطع مستويان متوازيان بمستقيم فأن ميله على أحدهما يساوي ميله على الآخر.

الحل:



المعطيات:  $(x) \parallel (Y)$ ,  $\overline{AC}$  يقطع  $(x)$  في نقطة B ويقطع  $(Y)$  في نقطة C

المطلوب: ميل  $\overline{AC}$  على  $(x)$  = ميل  $\overline{AC}$  على  $(Y)$

البرهان: نرسم  $\overline{AD} \perp (x)$  (يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستوي من نقطة معلومة).

$\therefore \overline{AD} \perp (Y)$  في E

(المستقيم العمودي على احد مستويين متوازيين يكون عمودياً على الآخر)

$\therefore \overline{BD}$  هو مسقط  $\overline{AB}$  على  $(x)$  (تعريف مسقط قطعة مستقيم)

$\overline{CE}$  هو مسقط  $\overline{AC}$  على  $(Y)$

1  $\angle$  هي زاوية ميل  $\overline{AB}$  على  $(x)$  (زاوية الميل: هي الزاوية المحددة بالمائل ومسقطه على المستوي)

2  $\angle$  هي زاوية ميل  $\overline{AC}$  على  $(Y)$

$m \angle 1 = m \angle 2$  (متناظرة)

ميل  $\overline{AC}$  على  $(x)$  = ميل  $\overline{AC}$  على  $(Y)$

و. ه. و



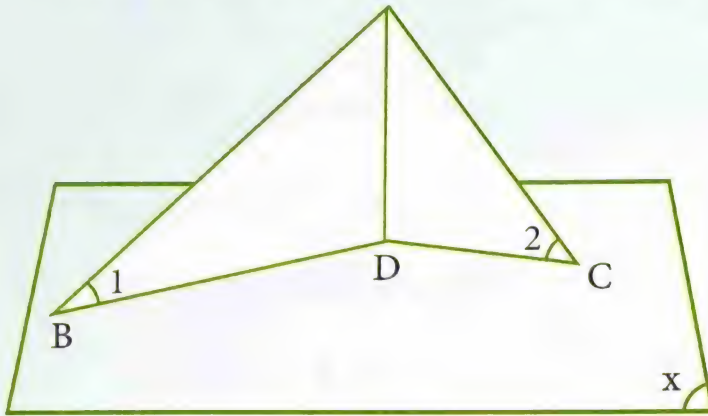




سؤال 4

برهن على انه إذا رسم مائلان مختلفان في الطول من نقطة لا تنتمي الى مستوي معلوم فإن أطولهما تكون زاوية ميله على المستوي أصغر من زاوية ميل الآخر عليه .

الحل



المعطيات:  $\overline{AB}$  ,  $\overline{AC}$  مائلان على  $(x)$  .

$$AB > AC$$

المطلوب: زاوية ميل  $\overline{AB}$  على  $(x)$  أصغر من زاوية ميل  $\overline{AC}$  على  $(x)$  .

البرهان: نرسم  $\overline{AD} \perp (x)$

(يمكن رسم عمود واحد فقط على مستوي من نقطة معلومة)

فيكون  $\overline{BD}$  هو مسقط  $\overline{AB}$  على  $(x)$

$\overline{CD}$  هو مسقط  $\overline{AC}$  على  $(x)$

(مسقط قطعة مستقيم غير عمودي على مستوي هو قطعة المستقيم الواصلة بين أثري العمودين المرسومين من طرفي القطعة على المستوي)

1  $\angle$  هي زاوية ميل  $\overline{AB}$  على  $(x)$

2  $\angle$  هي زاوية ميل  $\overline{AC}$  على  $(x)$

(زاوية الميل: هي الزاوية المحددة بالمائل ومسقطه على المستوي)

$\therefore AB > AC$  (معطى)

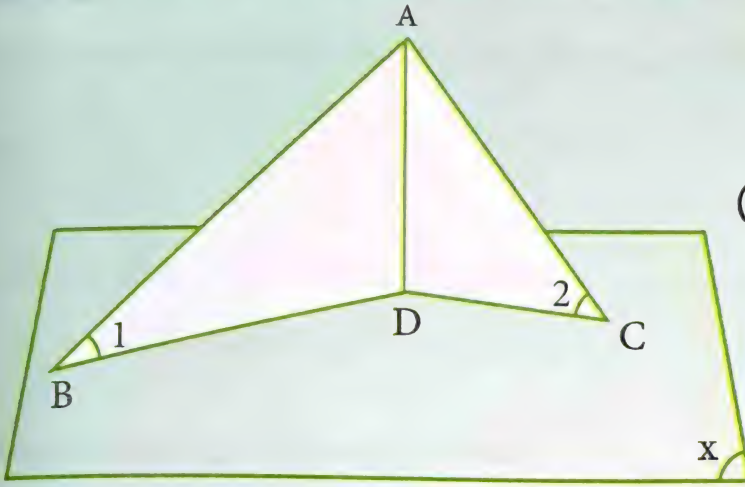
$$\frac{1}{AB} < \frac{1}{AC} \quad (\text{من التباين})$$

$$\frac{AD}{AB} < \frac{AD}{AC} \quad 1 \angle , 2 \angle \text{ زوايا حادة}$$

$$\sin 1 \angle < \sin 2 \angle \quad \therefore m 1 \angle < m 2 \angle$$



سؤال 5 برهن على انه إذا رسم مائلان من نقطة ما إلى مستوي فأصغرهما ميلاً هو الأطول.



الحل

المعطيات:  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  مائلان على (x)

1  $\angle$  هي زاوية ميل  $\overline{AB}$  على (x)

2  $\angle$  هي زاوية ميل  $\overline{AC}$  على (x)

$$m \angle 1 < m \angle 2$$

المطلوب:  $AB > AC$

البرهان:  $\therefore 1 \angle$ ,  $2 \angle$  هما زاويتي ميل  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  على (x) على الترتيب.

$\therefore \overline{BD}$  هو مسقط  $\overline{AB}$  على (x)

$\overline{CD}$  هو مسقط  $\overline{AC}$  على (x)

(زاوية ميل مستقيم على مستوي هي الزاوية المحددة بالهائل ومسقطه على المستوي)

فرسم  $\therefore \overline{AD} \perp (x)$

(مسقط قطعة مستقيم غير عمودية على مستوي هي قطعة المستقيم المحددة بين أثري العمودين المرسومين من طرفي تلك القطعة على المستوي)

$$\therefore \overline{AD} \perp \overline{BD}, \overline{CD}$$

(المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من

أثره في ذلك المستوي)

$$\therefore m \angle 1 < m \angle 2 \quad (\text{معطى})$$

$$\therefore \sin \angle 1 < \sin \angle 2$$

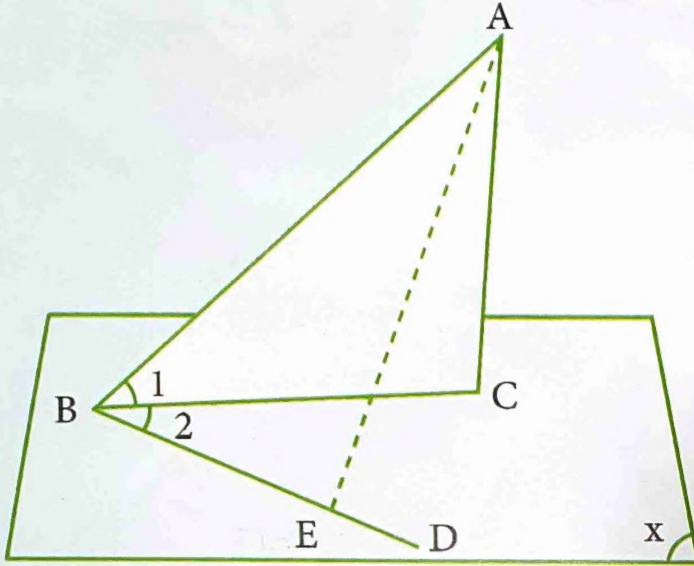
$$\frac{AD}{AB} < \frac{AD}{AC} \rightarrow \frac{1}{AB} < \frac{1}{AC} \rightarrow AB > AC \quad (\text{خواص التباين})$$

و. ه. ٤



**سؤال 6** برهن على غن الميل بين المستقيم ومسقطه على مستوي أصغر من الزاوية المحصورة بين المستقيم نفسه وأي مستقيم آخر مرسوم من موقعه ضمن ذلك المستوي.

الحل



المعطيات: ليكن  $\overline{BC}$  مسقط  $\overline{AB}$  على (x)

$\angle ABC$  زاوية ميل،  $\overline{BD} \subset (x)$

المطلوب:  $m \angle ABC < m \angle ABD$

البرهان: لتكن  $E \in \overline{BD}$

بحيث  $BC = BE$

نصل  $\overline{AE}$

$\therefore \overline{AC} \perp (x)$  (تعريف المسقط)

(العهد: هو أقصر مسافة بين نقطة ومستوي)

$$\overline{AC} < \overline{AE}$$

فيها  $\triangle ABC, \triangle ABE$

$BC = BE$  (بالعمل) و  $AB = AB$  (ضلع مشترك)

$$\therefore m \angle 1 < m \angle 2$$

(إذا تساوى ضلعاً مثلث ضلعي مثلث آخر واختلفت الضلعان الآخران فأصغرها يقابل أصغر الزاويتين)



# الأستاذ حيدر وليد

07701780364



2021

## الرياضيات



ثلاث فصول



ملازم  
دار المغرب

عند اقتناء ملزمتك من دار المغرب تأكد من وجود  
( الجلفة المدورة اللاصقة )  
في وجه الغلاف غير ذلك تعتبر مزورة



mlazmna





# المُسْنَدُ فِي الرَّيَاضِيَّاتِ

الجزء الأول

السادس الاحيائي

1

الأعداد المركبة

2

القطوع المخروطية

6

الهندسة الفضائية



صفحة ملازم  
دار المغرب

نحذر من استنساخها ولا يجوز ذلك لكون فيها اشكال شرعي وقانوني  
**وغير ميرئ الذمة** والملزمة موثقة من دار الكتب والوثائق  
علما ان ملازمنا حائزة على علامة تجارية من وزارة الصناعة  
دائرة التطوير والتنظيم الصناعي

هام  
للغاية

كل نسخة لا تحمل  
جلدة دائرية على  
وجه الغلاف  
تعتبر مزورة



## جانب الكرخ

## المركز الرئيسي مطبعة المغرب 07702729223

## جانب الرصافة

### مندوبنا في بغداد

### لتسويق الملازم للمكتبات 07711130300

الوكلاء الرئيسيين في بغداد لبيع  
الجملة للمكتبات والمفرد للطلاب  
هو وكيل رئيسي في بغداد

07903230011 مكتبة الجوهرة - المنصور

07506988352 مكتبة العربية - العامرية - ش. العمل الشعبي

07506306329 فرع ٢ - مكتبة العربية - مجمع العامرية الترفيهي

07711124177 مكتبة أغاني المنصور - ش. الرواد - عمارة برج المنصور

07800505058 مكتبة أغاني - ش. الامارات - داخل ثانوية افق

07714875122 مكتبة لايك - ح. العمال

07705433370 مكتبة الأزل - الكاظمية

07901332833 مكتبة ايد - الكاظمية - خلف الاطفاء

07701866998 قرطاسية الحرة - الحليبية

07832630930 مكتبة العربي - السبعية

07804047014 مكتبة الرناج - الدورة - ش. ابو طيار

07801300200 مكتب نقابة - ابو حبيب - الجراح الموحد

07817499813 مكتبة غسان - الدورة - الميكانيك - الساعاتي

07700730994 مكتبة النقي - المعالف - ش. دكتور حافظ

07736392510 مكتبة الانيق - الحرة - ش. صور صلاح

07805248242 مكتبة عمار - الغزالية

07702710731 مكتبة ستادي بل - ح. الجهاد

07704370050 مكتب الفوس - ح. الجامعة

07704258595 مكتبة الاخوين - ح. العمال

07704560438 مكتبة الاماني - الحرة - دور نواب الضباط

07707471214 مكتبة طربوش - الدورة - ش. ابو طيار - الرئيسي

07709995682 مكتبة الجرس - الدورة - شارع الجمعية

07903501673 مكتبة الناصر - الدورة - ح. الصحة

07821615412 مكتبة الحسام - البياض - مقابل معارض البياض

07835089920 مكتبة عبد الله - ح. القاسية - مجاور اعدادية الامين

07713644472 مكتبة ومركز القصير - الشقة - قطاع الاول

07818695644 مكتبة امجد وعمر - ناحية الرشيد - قرب اعدادية الروابي

07704777666 مكتبة المولى - الشرطة الرابعة - السوق الشعبي

07800789995 مكتبة القمة - الغزالية - شارع المرور

07715661103 مكتبة الايام - السبعية - ش. ٤٠ - المختار

07702538881 مكتبة الجوهرة في البنوك

07715884036 مكتبة حسن المهندس - بغداد الجديدة - النهرية

07715566655 مكتبة الشموس - ح. اور

07703465111 مكتبة العهد - مدينة الصدر داخل - قطاع ٥٢

07711625230 مكتبة بسماية - داخل مجمع البسمية

07713315551 مكتبة طاهر - ح. جميلة

07722633262 مكتبة جلال - الكريعات - الكوي

07700181191 مكتبة الانوار - البنوك - مجاور القتلاي

07707197770 مكتبة اشبيلية - ساحلة مظفر

07700181191 مكتبة الانوار / ح. اور

07713214973 مكتبة زرقاء العمامة / العدنان

07712569094 مكتبة فرطاس - الزعفرانية - فلكة المعهد

07716422334 مكتبة امولة - النهروان - شارع المستنق

07706930404 مكتبة جوفرة الحبيبة - الحبيبة - قرب مستشفى الواد

07709516294 مكتبة الامال - البنوك - شارع الكنيسة

07728662032 مكتبة القمة - ح. الخضراء - مقابل ثانوية المتفرجات

07709751579 مكتبة الريان - قضاء الطرمية - ش. محطة الوقود

07714271176 مكتبة الغدير - الدولعي - شارع المختار

07739690900 مكتبة المعتنى - ابو دشير

07707871074 مكتبة السند - السبعية - مقابل مرطبات الفعنة

07732746225 مكتبة الياز - السبعية

07711814743 مكتبة يوسف وحيدر - الدورة - السابعة

07902323008 مكتبة حيدر الضاد - ابو نير - شارع العام - ش. الصيرلة

07901583499 مكتبة المستقبل - غزاليه - شارع مديرا الامن

07706970536 مكتبة نجمة - السبعية - شارع الضباط

07705312272 مكتبة سرمد الاشر - ش. الربيعي

07733334104 مكتبة المستنصرية - ش. فلسطين

07732545553 مكتبة فاضل الوكيل - سوق السراي

07711438143 مكتبة اغاني - الخوير

07708813122 مكتبة التاج - بغداد الجديدة

07719018916 مكتبة طه - مدينة الصدر

07702808414 مكتبة النوارس - الاعظمية

07901307808 مكتبة الكوثر - ش. المعتني

07712617954 مكتب الصباح - الاعظمية

07705319230 مكتبة دار دور - زيوقة

07707118111 مكتبة المواهب - كرامة داخل

07709936949 مكتبة النبع - البنوك - ش. الجسر الجديد

07901292023 مكتبة الفضل - شارع المعتني

07702873687 مكتبة نور الدين - فلكة صباح الخياط

07700182381 مكتبة الربيعي رياض - زيوقة - قرب دار الزياء

07700682020 مكتبة المصترف - جسر ديشي - ش. الاطفاء

07715592207 مكتبة الصافي - بغداد الجديدة - الامين الثانية

07707188989 مكتبة كشكول - سبع ايكار منزل سوق السمكة

07704530191 مكتبة الفرسان - ح. البنوك

07733361889 مكتبة سعودي - المشتل - شارع العام

07717776160 مكتبة الزهور - بغداد الجديدة - نواب الضباط

07700700194 مكتبة المعتنى - الهاديوات

07737937330 مكتبة الفلاح - بغداد الجديدة - شارع العام

07728006098 مكتبة السعد الزرقاء - الخوير - ساحة ميسلون

07710552199 مكتبة المعتنى - الصليح - شارع العام

07704356665 مكتبة كرامة - كرامة داخل

07712294919 مكتبة بغداد - المشتل - شارع المطبخ

07702474058 مكتبة الصليح الجديد - الصليح

07701467104 مكتبة بونس - الزعفرانية - الاربع شوارع

07901147396 مكتبة التسميم - الكريعات - قرب المركز الصحي

## ملازم دار المغرب



## mlazmna

### تسويق داخل المطبعة

07733530300

وكلائنا الرئيسيين في المحافظات لبيع الجملة للمكتبات  
والمفرد للطلاب وفي كل محافظة وكيل رئيسي واجبة

### المركز التسويقي

07719373555 07819373555

### كربلاء

07801004015 مكتبة القيس

07707771731 مكتبة الزوراء

### كركوك

07701334425 قرطاسية الاسراء

07701306054 مكتبة اسامة

07719049333 قرطاسية الحاج علي

07709789943 مكتبة الشرق - القسية - مقابل نادي سواف

### ذي قار

07801576208 مكتبة أي قار - الناصرية - ش. الحوي

07816014615 مكتبة الهدى - الشرطة - ش. المعصية

07827524412 مكتبة الر - سوق الشيوخ

07803364615 مكتبة المرتضى - الشرطة

07711919969 مكتبة البخفادي - الرفاعي

07832303772 مكتبة الخبير - الناصرية - ش. الحوي

07826984033 علم - مكتب الباطن - الناصرية - الصليحة

### واسط

07725423700 مكتبة الكريم

07802469001 مكتبة التقنية - التصافية

07726350721 مكتبة الفرح - الفريزية - قرب فلكة اس

07719001002 مكتبة الهيثم - شارع المحافظة

07821800900 مكتبة الجواهر - الصويرة

07807170745 مكتبة نور المنتظر - صويرة

07802255075 مكتبة مجلة الخير - الزبيدية

### بابل

07802767474 مكتبة التاج - الحلة - شارع ٤٠

07707244421 مكتبة الجوهرة - قضاء المسيب

07800200350 مكتبة ابو محمد - الحيرة - الغربي

07806504010 مكتبة الاندلس - حلة - باب الحسين

07723975335 مكتبة الطالب - المسيب

07725255952 قرطاسية القمر - حمزة الغربي

07713182440 مكتبة المنتظر - المسيب

07812209161 مكتبة قصر المعارف - الحيرة - الغربي

### التجف الاشرف

07828292236 مكتبة النرجس

07801067833 مكتبة التجف الاشرف - المدينة القديمة

07801306615 مكتبة البغدادي - ح. الجامعة

07800662212 مكتبة الوان - ح. الامير

### الموصل

07740864133 مكتبة ثقافة - المجموعة الثقافية

07511798067 مكتبة الفجر - الموصل - ح. القسية الثانية

07713309033 مكتب كشكول - المجموعة الثقافية

07510332312 مكتب الشمس - مقابل نفق الجامعة

07714778029 مكتبة رحلي - ح. المتش - ش. العام

07701727822 مكتبة معتر - موصل - ح. القفس

07503072983 مكتبة ملازمي - نفق الجامعة

07516271021 مكتبة حروف - الموصل - القسية الثانية

### الانبار

07828881255 مكتبة يوسف - الرمادي - شارع السواد

07818100788 مكتبة الرصافي - الفلوجة - شارع ٤٠

07812525961 مكتبة المصطفى - الرمادي - الجمعية

07800081212 مكتبة حيدر - الرمادي - التاميم - القاسية الاولى

07831054822 مكتبة السامر - قضاء هيت - ش. مستشفى هيت

07902727220 مكتبة البروج - هيت - ش. المدخل الرئيسي

07828236703 مكتبة جبل الجند - حنينة - مقابل جنسية برونة

07809338325 مكتبة النور - حنينة - شارع العام

07814714141 مكتبة النهريين - خالدية - ش. المستنق

07810350640 مكتبة وليد الشاهر - الرمادي - شارع ١٧

### صلاح الدين

07702854488 مكتبة الصليح - سامراء - شارع القاضي

07703771003 مكتبة الشروق - تكريت - شارع الاربين

07817789408 مكتبة النقي - بلد

07712130374 مكتبة الضيوف - سامراء - ح. السكك

### الديوانية

07801574901 مكتب النهريين - الديوانية

07831355322 مكتبة المنار

07801089423 مكتبة الشمس

07702909912 مكتبة الجديدة - ش. المواهب

07725222984 مكتبة الصقر - قضاء الشامية

07827742264 مكتبة الطالب المتميز - قضاء الحمزة

### البصرة

07702687911 مكتبة الجنود

07902494935 مكتبة العريد

07703133928 مكتبة حسين الطواني - المنبنة

### ديالى

07702406444 مكتب النقي - خالقي - شارع الانباء

07903666349 مكتبة ام البنين - الخالص

07707867592 مكتبة الزهراء - الخالص

07711040655 مكتب لعتبي - الخالدية - سوق ح. الخمين

07711147502 مكتبة الايو - بغدوة

07706202828 مكتبة حيدر - بلدروز - ش. المحكمة

07729651805 مكتبة النهريين - خان بني سعد

07724393211 مكتب بروت - بغدوة - مقابل اعدادية فريسات الاحياء

07722052602 مكتبة ايل الانتظار - دالي - جديدة الشط

07731030555 مكتبة الرضوان - بغدوة الجديدة - شارع الطويل

### ميسان

07705572853 مكتب الشرف وطلون - شارع مجلة

07710889998 مكتب مهدي

07710901616 المكتبة العلمية - المجر الكبير

07707319377 مكتبة الملازمة - شارع المدارس

07707333790 مطبعة الحرف الضوي - فلكة صالح

### المنجلى

07716163457 قرطاسية فراش - السماوة

07827281959 مكتبة المنتظر - السماوة

### سعر النسخة للطالب

10 الاف دينار

نحذر من استنساخها وسحبها من الانترنت عن طريق برامج التواصل الاجتماعي او ايصالها بالموبايل او اجهزة نقل الملفات الى اصحاب

المكتبات وسحبها او شراء الملازمة مستنسخة وبيعها عن اي طريق يؤدي الى ضرر المطبعة سواء كان من الوكيل او غيره

ولا يجوز ذلك لكون فيها اشكال شرعي وقانوني وغير مبرر الدمة والملازمة موقعة من دار الكتب والوثائق علما ان ملازمنا حائزة

على علامة تجارية من وزارة الصناعة / دائرة التطوير والتنظيم الصناعي

### كل نسخة لا تحمل

جلدة دائرية على وجه الغلاف

تعتبر مزورة